الموديولات الحرة:

تعريف (1): ليكن M موديولاً على حلقة R، نقول عن M إنه حر إذا وجد (F, f) موديول حر على مجموعة $S \neq \phi$ بحيث:

$$M \cong F.$$

تعريف (2): لتكن S مجموعة غير خالية من موديول M على حلقة R، نقول عن S أنها حرة على R (مستقلة خطياً على R) إذا كانت من أجل أية مجموعة منتهية $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ من S يتحقق الاقتضاء:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

ونقول عن S إنها قاعدة لـ M إذا تحقق:

S حرة و $M = \langle S \rangle$

تذكرة

$M = \langle S \rangle \leftrightarrow$ كل عنصر من M يكتب كتركيب خطي لمجموعة منتهية من عناصر S.

$\leftrightarrow$ أياً كان $m \in M$ فإنه يوجد $x_i \in S$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ بحيث:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad , \quad \alpha_i \in R$$

مبرهنة: إذا كان M موديولاً على حلقة R و $\phi \neq S \subseteq M$ عندئذٍ القضيتين الآتيتين متكافئتان:

I) S قاعدة لـ M.

II) كل عنصر من M يكتب كتركيب خطي بشكل وحيد لجملة منتهية من عناصر S

الإثبات:

$II \to I$: بما أنّ S قاعدة لـ M فإنّ كل عنصر من M يكتب
كتركيب خطي لجملة منتهية من عناصر S ولنبرهن أنّ هذه
الكتابة وحيدة.
أي يوجد $x_i \in S$ $(i=1,2,\dots,n)$ بحيث:

$$\forall m \in M : m = \sum \alpha_i x_i \; ; \; \alpha_i \in R$$

ولنفرض أنّ   برهان الوحدانية

$$m = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i x_i$$

عندئذٍ:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i x_i$$

$$\Rightarrow \quad \sum (\alpha_i - \alpha'_i) x_i = 0$$

وبما أنّ S حرّة فإنّ:

$$\alpha_i - \alpha'_i = 0 \quad \forall (i=1,\dots,n)$$

وبالتالي:

$$\alpha_i = \alpha'_i \quad \forall (i=1,2,\dots,n)$$

$I \to II$: حسب الفرض نجد مباشرة أنّ:

$$M = \langle S \rangle$$

ولنبرهن على أنّ S حرّة على R.
لتكن $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ جملة منتهية ما من S ولكن:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$$

وحسب الفرض:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 = \sum_{i=1}^{n} 0 x_i$$

وحسب الفرض فإنّ العنصر 0 يكتب بشكل وحيد بدلالة الجملة وينتج من ذلك:

كل فضاء شعاعي هو مودول

فالفضاء الشعاعي $R_n[x]$ هو مودول وقاعدته $S=\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$

$$\alpha_i=0 \quad \forall\, i=1,2,\dots,n$$

أمثلة :

① لتكن R حلقة ولتكن n عدداً صحيحاً موجباً فإن R^n مودول على R وأن المجموعة

$S=(e_1=(1,0,0,\dots,0),\, e_2=(0,1,0,0,\dots,0),\dots,$
$e_n=(0,0,\dots,1))$

قاعدة في R^n

② لنأخذ المودول $M=\langle a\rangle_n$ (على الحلقة $\mathbb{Z}$)

فنجد أن $M=\langle a\rangle$ (M مولدة بالمجموعة a)

لكن المجموعة $\{a\}$ ليست حرة لأن :

$n.a=0 \quad \wedge \quad n\neq 0$

أي $\{a\}$ ليست قاعدة لـ M.

③ لنأخذ المودول $M=\langle a\rangle_\infty$ فنجد أن $\{a\}$ تولد M وأنه إذا كان :
$\alpha a=0$ فإن $\alpha=0$ أي المجموعة $\{a\}$ قاعدة لـ M.

④ إذا كان (F,f) مودولاً حراً على مجموعة $S\neq\phi$ فإن $Im f$ قاعدة لـ f

سؤال للمناقشة :

إذا كانت $S\neq\phi$ مجموعة غير خالية و R حلقة ما، هل يمكن بناء مودول حر على S؟

الجواب : نعم.

لنأخذ $F=R^S$ مجموعة كل التطبيقات v التي منطلقها S ومستقرها R والتي تحقق : $v(s)=0$ من أجل جميع عناصر S باستثناء عدد منتهٍ منها

$V \cong W$ الأبعاد لها نفس البعد

$\mathbb{R}_n[x] \cong \mathbb{R}^{n+1}$

$\{1\}$ أساس لـ $\mathbb{C}$ على $\mathbb{C}$ بعده 1 ، $\mathbb{R}$

$\{1, i\}$ أساس لـ $\mathbb{C}$ على $\mathbb{R}$ بعده 2

$\mathbb{C}$ يماثل $\mathbb{R}^2$ الأبعاد $\mathbb{C}$ على $\mathbb{R}$

ولنعرف على هذه المجموعة قانوني التشكيل :

$(+) : (v+u)(s) = v(s) + u(s)$

داخلي

مجموعة خارجي $(\cdot) : (\alpha v)(s) = \alpha\, v(s)$

مؤثراته الحلقة R

فنجد أن F موديول على R

ولنأخذ

$$f : S \longrightarrow F$$
$$s \longmapsto f_s$$

بحيث :

$$f_s(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad t = s \\ 0 & ; \quad t \neq s \end{cases}$$

حسب ④

فنجد أن (F, f) موديول حر على S ويكون $Im f$ قاعدة لـ F

نتيجة إذا كان (F, f) موديولاً حراً على مجموعة $S \neq \phi$ فإن $Im f$ قاعدة لـ F

وبالتالي :

M حر $\leftrightarrow$ M يمتلك قاعدة له

وبناءً على ذلك يكون :

① الموديول R^n حر.

② الموديول $\langle a \rangle_n$ على $\mathbb{Z}$ ليس حراً (لا يوجد قاعدة)

③ الموديول $\langle a \rangle_\infty$ على $\mathbb{Z}$ حر.

مبرهنة إذا كان M, N موديولين على حلقة R وكان M حراً وقاعدته $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ وكانت $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ مجموعة عناصر من N فإنه يوجد تشاكل موديولي وحيد : $f : M \longrightarrow N$ يحقق $f(v_i) = u_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$

هذه المبرهنة تعني : يكفي $f : M \longrightarrow N$ حيث M حر بأن نعرف صور عناصر قاعدة المنطلق ولا داعي لصياغة قاعدة ربطه.

الإثبات: لنأخذ العلاقة: $f: M \longrightarrow N$

يكتب بشكل وحيد لأن α_i وحيدة وبالتالي [illegible]

$$f\left(m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

لنثبت أن f تطبيق لأنه إذا كانت:

$$(m, m' \in M) : m = m' \rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i v_i \rightarrow$$

$$\alpha_i = \alpha'_i \quad \forall i = 1, \dots, n \rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i u_i$$

لأن عناصر u [illegible] N

$$\rightarrow f(m) = f(m')$$

كذلك إذا كانت $m, m' \in M$ ، $\alpha \in R$ فإن:

$$f(\alpha m + m') = f\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i v_i\right)$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha \alpha_i + \alpha'_i) v_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha \alpha_i + \alpha'_i) u_i$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i u_i$$

$$= \alpha f(m) + f(m')$$

كذلك التشاكل f يحقق:

من تعريف f $\quad f(v_i) = u_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$

وإذا كان: $g: M \longrightarrow N$ تشاكل محقق يحقق $g(v_i) = u_i \; (i = 1, 2, \dots, n)$

فإنه إذا كانت $m \in M$ فإن:

$$g(m) = g\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = f(m)$$

تساؤل: إذا كانت $S=\{x_1,\dots,x_n\}$ مجموعة منتهية من مودول M على حلقة R

فهل يمكن بناء مودول حر قاعدته S ؟؟؟!

الجواب: نعم

لنأخذ المجموعة: مجموعة التراكيب الخطية

$$M=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \ ; \ \alpha_i\in R \ ; \ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i \Leftrightarrow \alpha_i=\beta_i\right\}$$

ولنعرّف على هذه المجموعة قانوني التشكيل:

داخلي $(+)$: $$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i x_i=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\alpha'_i)\,x_i$$

خارجي $(\cdot)$: $$\alpha\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha\alpha_i x_i$$

مجموعة مؤثراته الحلقة R

بسهولة نجد أن M مودول على R

وأنّ S قاعدة له.

يسمّى M المودول الحر المبتذل