لنسبت ناتجة من تسلسل منطقي وإغلاق $N = \mathrm{Im} f \oplus \ker \rho$

3/12/2013 المحاضرة السادسة عشر

$M \cong \mathrm{Im} f$ ⟸ f متباين

مبرهنة: إذا كانت:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

($a+b$)

متتالية تامة من التشاكلات المودولية فإنّ القضيتين التاليتين متكافئتان:

I) المتتالية (1) منشطرة من اليسار.

II) $\mathrm{Im} f$ حد مكمل مباشر في N

الإثبات:

$(\mathrm{I} \to \mathrm{II})$: ليكن $\rho : N \longrightarrow M$ التشاكل المنشطر أي:

$$\rho \circ f = I$$

عندئذٍ أياً كان $n \in N$ فإنّ: I

$$\rho(n - f\circ\rho(n)) = \rho(n) - \rho(f\circ\rho)(n)$$
$$= \rho(n) - \rho(n)$$
$$= 0$$

$n - f(\rho(n)) \in \ker \rho$

ومنه:

$$n - \underbrace{f(\rho(n))}_{\in \mathrm{Im} f} \in \ker \rho$$

وهذا يبيّن أنّ:

$$\boxed{N = \mathrm{Im} f + \ker \rho} \quad (\mathrm{I})$$

من جهة ثانية: أياً كان:

$x \in \mathrm{Im} f \cap \ker \rho \longrightarrow$

$x \in \mathrm{Im} f$ and $x \in \ker \rho$

$\exists\, m \in M : x = f(m)$ and $\rho(x) = 0$

ومنه:

$\rho(f(m)) = 0 \Longrightarrow m = 0$

ومنه:

$x = f(0) = 0$

إذاً:

$$\boxed{\mathrm{Im} f \cap \ker \rho = 0} \quad (\mathrm{II})$$

بما أنه n يكتب بشكل وحيد
فإنه $n=a+b$
a تعين بشكل وحيد

من (I) و (II) نستنتج أنه:

$$N = \mathrm{Im} f \oplus \ker \rho$$

$I \to II$: حسب الفرض يوجد مودول جزئي B من N بحيث:

$$N = \mathrm{Im} f \oplus B$$

وبالتالي فإنه إذا كان $n \in N$ فإن n يكتب بشكل وحيد:

$$n = a+b \;;\; a \in \mathrm{Im} f \text{ and } b \in B$$

وبما أنه f متباين فإن: $M \cong \mathrm{Im} f$ وبالتالي

كل عنصر $a \in \mathrm{Im} f$ يعين عنصراً وحيداً في M نرمز له بـ $f^{-1}(a)$

وبالتالي كل عنصر $n = a+b \in N$ يعين عنصراً وحيداً $f^{-1}(a)$

وبذلك نحصل على التشاكل:

$$\rho : N \longrightarrow M$$ لأنه f تشاكل

$$\rho(n = a+b) = f^{-1}(a)$$

ويكون:

$$m \in M : (\rho \circ f)(m) = \rho(f(m)) = f^{-1}(f(m)) = m$$

أي:

$$\rho \circ f = I$$

وبالتالي المتتالية (1) منشطرة.

وهو المطلوب

مبرهنة:

إذا كانت:

غامر وغامر

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow[g]{g_A} P \longrightarrow 0 \quad (1)$$

متتالية تامة من التشاكلات المودولية فإنه القضيتين التاليتين متكافئتان:

I) المتتالية (1) منشطرة من اليمين.

II) $\ker g$ حد مكمل مباشر في N.

الإثبات :

(II ← I) : حسب الفرض يوجد تشاكل مودولي $\pi : P \longrightarrow N$ ويحقق :

$$g \circ \pi = I_P$$

ولنبرهن علاقة :

$$N = \ker g \oplus \operatorname{Im} \pi$$

إثبات I : $n \in N$ فإن :

$$n = a + b$$

$$g(n - \pi \circ g(n)) = g(n) - g\underbrace{(\pi \circ g)}_{I}(n)$$

$$= g(n) - g(n)$$

$$= 0$$

ومنه :

$$n - \pi \circ g(n) = n - \pi(g(n)) \in \ker g$$

أي أنّ :

$$\text{I} \quad \boxed{N = \ker g + \operatorname{Im} \pi}$$

من جهة ثانية : إثبات :

$$\forall x \in \ker g \cap \operatorname{Im} \pi$$

$$\longrightarrow x \in \ker g \quad \wedge \quad x \in \operatorname{Im} \pi$$

$$\Longrightarrow g(x) = 0 \quad \wedge \quad \exists\, p \in P : x = \pi(p)$$

وبالتالي :

$$\overbrace{g \circ \pi}^{I}(p) \qquad g(\pi(p)) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad p = 0$$

ومنه :

$$x = \pi(0) = 0$$

أي :

$$\text{II} \quad \boxed{\ker g \cap \operatorname{Im} \pi = 0}$$

أي : من I و II :

$$N = \ker g \oplus \operatorname{Im} \pi$$

$g(x+a) = g(a) \; ; \; g(x) = 0 \; ; \; x \in \ker g$

(I → II): حسب الفرض يوجد مودول جزئي A من N بحيث:

$$N = \ker g \oplus A$$

وبالتالي:

$$\forall n \in N : n \equiv x + a \; ; \; x \in \ker g \wedge a \in A$$

لكن g_A مقصور التشاكل g على المودول A فهو تشاكل و
بما أن: $g_A(a) = g(a)$ وأن g غامر فإن g_A
غامر

كما أن g_A متباين لأن:

إذا كان: $a \in \ker g_A$ فإن:

$$g_A(a) = g(a) = 0$$

أي أن $a \in \ker g$

أصبح لدينا $a \in \ker g \wedge a \in A$

أي:

$$a \in \ker g \cap A = 0$$

أي $a = 0$ إذاً g_A متباين.

وبذلك يصبح g_A تماثلاً مودولياً.

فله تقابل عكسي g_A^{-1} هو لنبرهن على أن g_A^{-1} هو
التشاكل المنشطر:

$$\pi = g_A^{-1} : P \longrightarrow N$$

$$\forall p \in P : (g \circ \pi)(p) = g(\pi(p)) = g(g_A^{-1}(p)) = p$$

أي: $\boxed{g \circ \pi = I_P}$

والمتتالية منشطرة من اليمين

وهو المطلوب

نتيجة: إذا كانت المتتالية منشطرة [من اليمين ومن اليسار]

$$0 \longrightarrow M \underset{\rho}{\overset{f}{\rightleftarrows}} N \underset{\pi}{\overset{g}{\rightleftarrows}} P \longrightarrow 0$$

$$\ker g \oplus \overset{P}{\mathrm{Im}\,\pi} \cong N \cong \underset{M}{\mathrm{Im}\, f} \oplus \ker g$$

$$\mathrm{Im}\, f \cong M \qquad f \text{ متباين}$$

$$\mathrm{Im}\, \pi \cong P \qquad \pi \text{ متباين}$$

$$\ker g = \mathrm{Im}\, f \cong M$$

أصبح لدينا

$$N \cong M \oplus P$$

لذلك P, M موديولات جزئية من N لأن التماثل إلى مساواة.

انتهت المحاضرة السادسة سهر