# المحاضرة الثالثة عشر

17/11/2013

جداء كوشي

جداء المتسلسلات العقدية:

بفرض $\sum z_n$ ، $\sum w_n$ متسلسلتان عقديتان حيث:

$$\sum z_n = z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + \cdots$$

$$\sum w_n = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

عندئذٍ نعرّف متسلسلة جداء كوشي كما يلي:

$$\sum p_n = \left(\sum z_n\right)\left(\sum w_n\right)$$

$$= \underbrace{\boxed{z_0 w_0}}_{p_0} + z_0 w_1 + z_0 w_2 + z_0 w_3 + \cdots + z_1 w_0 + z_1 w_1$$

$$+ z_1 w_2 + z_1 w_3 + \cdots + z_2 w_0 + z_2 w_1 + z_2 w_2 + z_2 w_3 + \cdots$$

$$+ z_3 w_0 + z_3 w_1 + z_3 w_2 + z_3 w_3 + \cdots$$

$$\vdots$$

وبالتالي:

$$p_n = z_n w_0 + z_{n-1} w_1 + \cdots + z_0 w_n$$

$$= \sum z_k w_{n-k}$$

ومنه:

$$\boxed{\sum p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} z_k w_{n-k}}$$

"حفظ"

ملاحظة: جداء متسلسلتين متقاربتين ليس بالضرورة متسلسلة متقاربة.

مثال: لتكن المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ متقاربة حسب ليبنتز ولنضع:

$$\sum p_n = \left(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)^2$$

ملاحظات:

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \left( \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \right) \left( \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \right)$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

[illegible]

$$(k+1)(n-k+1+1-1) = (k+1)((n+2)-(k+1))$$

$$= (k+1)(n+2) - (k+1)^2$$

$$= -\left[ (k+1)^2 - (k+1)(n+2) + \frac{(n+2)^2}{4} - \frac{(n+2)^2}{4} \right]$$

$$= -\left( k+1 - \frac{n+2}{4} \right)^2 + \frac{(n+2)^2}{4} \leqslant \frac{(n+2)^2}{4}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geqslant \frac{2}{n+2}$$

$$\Rightarrow |P_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geqslant (n+1) \cdot \frac{2}{n+2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 2$$

فالحد العام لمتسلسلة الجداء لا يسعى للصفر ومنه المتسلسلة متباعدة.

مبرهنة ميرتن:

بفرض $\sum w_n$ ، $\sum z_n$ متسلسلتين عدديتين بحيث $\sum z_n$ متقاربة بالإطلاق ومجموعها $S$ ، $\sum w_n$ متقاربة ومجموعها $T$ عندئذٍ متسلسلة جداء كوشي لها متقاربة ومجموعها $\sigma = S.T$

الإثبات:

نضع

$$S_n = \sum_{k=0} z_k \quad , \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} w_k \quad \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} P_k$$

متتالية المجاميع الجزئية

متسلسلة الجداء حسب كوشي

ولنضع $\beta_n = T_n - T$ فيكون $T_n = \beta_n + T$

عندئذٍ :

$$\sigma_n = \overset{P_0}{(z_0 + w_0)} + \overset{P_1}{(z_0 w_1 + z_1 w_0)} + \cdots + \overset{P_n}{(z_0 w_n + z_1 w_{n-1} + \cdots + z_n w_0)}$$

$$= z_0 T_n + z_1 T_{n-1} + \cdots + z_n T_0$$

$$= z_0(\beta_n + T) + z_1(\beta_{n-1} + T) + \cdots + z_n(\beta_0 + T)$$

$$= T(z_0 + z_1 + \cdots + z_n) + (z_0 \beta_n + z_1 \beta_{n-1} + \cdots + z_n \beta_0)$$

$$= T S_n + (z_0 \beta_n + z_1 \beta_{n-1} + \cdots + z_n \beta_0)$$

نضع :

$$\gamma_n = z_0 \beta_n + z_1 \beta_{n-1} + \cdots + z_n \beta_0$$

بما أنّ $\sum z_n$ متقاربة بالإطلاق فإنّ :

$\sum |z_n| = \alpha \rightarrow$ تختلف عن $S$ لأنّها مجموع الإطلاق وهو مختلف عن مجموع المتسلسلة المتقاربة الأصلية

وبما أنّ $\sum w_n$ متقاربة فإنّ $\beta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

متتالية ثابتة

$$\begin{array}{ccccc} T_n & = & \beta_n & + & T \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T & & 0 & & T \end{array}$$

وبالتالي :

تقارب $\beta_n$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N > 0 ; \forall n \geq N ; |\beta_n| < \varepsilon$$

لنثبت $N$ ونجعل $n \to \infty$ عندئذٍ :

ومنه : $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$|\gamma_n| < \alpha \varepsilon$$

بجعل $\varepsilon \to 0$ عندئذٍ $\gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

وبالتالي : $\sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S.T$

تمرين: بفرض $\sum z_n = \sum \frac{(1+i)^n}{n!}$ و $\sum w_n = \sum \frac{i}{n+1}$

أثبت أن $(\sum w_n)(\sum z_n)$ متقاربة

الحل:

نلاحظ أن:

$$P = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(1+i)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(1+i)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1+i}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|1+i|^{=\sqrt{2}}}{n+1} = 0$$

ومنه $\sum z_n$ متقاربة بالإطلاق حسب اختبار دالامبير

كما أن:

$\sum w_n = \sum \frac{i}{n+1}$ متقاربة حسب ليبنز $\boxed{|i| = 1}$

وبالتالي حسب مبرهنة ميرتن متسلسلة الجداء متقاربة.

## متسلسلات القوى

بفرض $z_0$ ثابت عقدي و $z$ متحول عقدي و $\{a_n\}$ متتالية عقدية عندئذ ندعو المتسلسلة: $\sum_{n=0} a_n (z - z_0)^n$ بمتسلسلة قوى.

نسمي $z_0$ مركزها، $\{a_n\}$ متتالية الأمثال و $a_0$ الحد الثابت

ملاحظة

متسلسلة القوى متقاربة بالإطلاق عند مركزها $z_0$ دوماً. عندما $z = z_0$ وبتكون متقاربة بالإطلاق

مبرهنة:

بفرض $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ متسلسلة قوى عندئذ يوجد $R \in [0, \infty]$

بحيث تكون المتسلسلة متقاربة بالإطلاق داخل القرص $D(z_0, r)$ و
متباعدة خارجه بحيث r يعطى بالقانون:

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

ملاحظة: اذا كان $r=0$ يكون التقارب بالإطلاق عند المركز $z_0$
واذا كان $r=\infty$ يكون التقارب بالإطلاق على كامل المستوي العقدي
نصطلح هنا: $\frac{1}{0} = \infty$ ، $\frac{1}{\infty} = 0$

تمرين: احسب نصف قطر التقارب لمتسلسلات القوى التالية:

$\boxed{1}$ $\sum_{n=0} z^n$

متسلسلة هندسية

متسلسلة قوى مركزها $z_0 = 0$ ، متتالية الأمثال $\{a_n\} = \{1\}$
الحد الثابت $a_0 = 1 \Leftarrow$

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1}} = 1$$

وقرص التقارب $D(0, 1)$

$\boxed{2}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$ $\quad r = 1 \;,\; D = (i, 1)$

$\boxed{3}$ $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (z+1)^n$ $\quad r = 0$

متقاربة عندما $z = -1$ فقط

$\boxed{4}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{n+1}$