كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق السنة : الثانية

المقرر : تحليل عددي (1) الفصل : الأول

المحاضرة : (20) التاريخ : 2013/12/17

الفصل الخامس : التفاضل العددي :

مقدمة :

نعرف المعادلة التفاضلية من المرتبة n بأنها كل معادلة من الشكل

$$f\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

ونقول عن هذه المعادلة أنها قابلة للحل بالنسبة للمشتق الأعلى رتبة إذا أمكن كتابتها على الشكل :

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

ونقول عن التابع $y = \varphi(x)$ أنه حل للمعادلة التفاضلية إذا كان :

$$\varphi^{(n)}(x) = f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)\right)$$

ونقول عن $y = \varphi(x)$ أنه حل عام للمعادلة التفاضلية إذا كان $y = \varphi(x)$ يحوي n وسيط مستقل أي

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

فإذا أعطينا n شرط ابتدائي عند النقطة x_0 كما يلي :

$$y(x_0) = y_0 \quad \& \quad y'(x_0) = y_0' \quad \& \dots \& \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

نحصل على n مجهول $c_1, c_2, \dots, c_n$ وبحلها نحصل على الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

مثال :

اثبت أن $y = \varphi(x) = e^x + c_1 x + c_2$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y'' = e^x$ ثم أوجد الحل الخاص الذي يحقق $y'(0) = 1 \quad \& \quad y(0) = 0$

الحل :

نلاحظ أن $y' = e^x + c_1$ و $y'' = e^x$ أي محققة

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = e^0 + c_1(0) + c_2 \Rightarrow c_2 = -1$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow 1 = e^0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

منه فإن $y = e^x - 1$ هي حل خاص للمعادلة .

لكن حل المعادلات التفاضلية من المواضيع الصعبة في الرياضيات لذلك نلجأ للطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية ولذلك نكتفي بطريقة تايلور لحل معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى

طريقة تايلور :

بفرض $y' = f(x,y)$ معادلة تفاضلية مزودة بشرط ابتدائي $y(x_0) = y_0$ وبفرض $x_{i+1} - x_i = h : i = 0,1, \dots \dots$ عندئذٍ يكون منشور تايلور على الشكل التالي :

$$\boxed{y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1!}\, y'(x) + \frac{h^2}{2!}\, y''(x) + \frac{h^3}{3!}\, y'''(x) + \cdots\cdots}$$

نعوض $x = x_0$ فنحصل على $y(x_1)$ ثم نعوض $x = x_1$ فنحصل على $y(x_2)$ وهكذا ...

مثال :

باستخدام طريقة تايلور أوجد حل تقريبي للمعادلة التفاضلية $y' = xy$ حيث $y(0) = 1$ و $h = 0.1$ في المجال $[0\,,0.2]$ مستخدماً أربع حدود من منشور تايلور

الحل :

نلاحظ أن منشور تايلور بأربع حدود كما يلي :

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6}\, y'''(x)$$

$$: \; y' = x \times y \;\Rightarrow y'' = y + y'x = x^2y + y \Rightarrow \; y''' = 2xy + x^2y' + y' = 3xy + x^3y$$

$$(x_0, y_0) = (0\,,1) \Rightarrow \;\; y'(0) = 0 \quad \& \quad y''(0) = 1 \quad \& \quad y'''(0) = 0$$

$$y_1 = y(x_1) = y(0.1) = y(0) + hy'(0) + \frac{h^2}{2}\, y''(0) + \frac{h^3}{6}\, y'''(0)$$

$$= 1 + 0 + \frac{(0.1)^2}{2}(1) + 0 = 1.005$$

$$(x_1, y_1) = (0.1\,,1.005) \Rightarrow y'(0.1) = 0.1005 \qquad \& \qquad y''(0.1) = 1.015 \qquad \&$$

$$y'''(0.1) = 0.3025$$

$$y_2 = y(x_2) = y(0.2) = y(0.1) + hy'(0.1) + \frac{h^2}{2}\, y''(0.1) + \frac{h^3}{6}\, y'''(0.1)$$

$$= 1.005 + 0.1(0.1005) + \frac{(0.1)^2}{2}(1.015) + \frac{(0.1)^3}{6}(0.3025) = 1.0201$$

ومنه

x	0	0.1	0.2
y	1	1.005	1.0201

نلاحظ أن الحل الفعلي كما يلي :

$$y' = \frac{dy}{dx} = x \times y \Rightarrow \frac{dy}{y} = x\, dx \Rightarrow ln\, y = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y = c\, e^{\frac{x^2}{2}}$$

ولدينا $y(0) = 1$ فيكون $c = 1$ فيكون الحل الخاص هو :

$$y = c\, e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y(0) = 1\ ,\ y(0.1) = 1.005\ ,\ y(0.2) = 1.0202$$

مثال2 :

باستخدام طريقة تايلور أوجد حل تقريبي للمعادلة التفاضلية $y' = x - y$ حيث $y(0) = 0$ و $h = 0.25$ في المجال $[0\,,1]$ مستخدماً ثلاث حدود من منشور تايلور

الحل :

نلاحظ أن منشور تايلور بثلاث حدود كما يلي :

$$y(x+h) = y(x) + h\, y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x)\ \ :\ y' = x - y \Rightarrow y'' = 1 - y' = 1 - x + y$$

$$(x_0, y_0) = (0\,,0) \Rightarrow y'(0) = 0 \quad \& \quad y''(0) = 1$$

$$y_1 = y(x_1) = y(0) = 0 + 0 + \frac{(0.25)^2}{2}(1) = 0.0312$$

$$(x_1, y_1) = (0.25\,,0.0312) \Rightarrow y'(0.25) = 0.2188 \quad \& \quad y''(0.25) = 0.7812$$

$$y_2 = y(x_2) = y(0.5) = 0.0312 + 0.25(0.2188) + \frac{(0.25)^2}{2}(0.7812) = 0.1103$$

$$(x_2, y_2) = (0.5\,,0.1103) \Rightarrow y'(0.5) = 0.3897 \quad \& \quad y''(0.5) = 0.6103$$

$$y_3 = 0.1103 + 0.25(0.3897) + \frac{(0.25)^2}{2}(0.6103) = 0.2267$$

$$(x_3, y_3) = (0.75\,,0.2267) \Rightarrow y'(0.75) = 0.5233 \quad \& \quad y''(0.75) = 0.4767$$

$$y_4 = 0.2267 + 0.25(0.5233) + \frac{(0.25)^2}{2}(0.4767) = 0.3724$$

ومنه

x	0	0.25	0.5	0.75	1
y	0	0.0312	0.1103	0.2267	0.3724

وظيفة :

أعد التمرين السابق من أجل المعادلة $y' = \frac{x-y}{2}$ حيث $y(0) = 1$ في المجال $[0\,,0.5]$ و $h = 0.25$ مستخدماً خمس حدود من منشور تايلور

...انتهت المحاضرة (20) ...