كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق — السنة : الثانية

المقرر : تحليل (3) — الفصل : الأول

المحاضرة : (16) — التاريخ : 2013/12/1

(قانون)

$$\forall\, n \geq 1 \;;\; L[f(t)] = F(s) \;\Rightarrow L[t^n . f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \qquad (*)$$

البرهان : ((بوساطة الإستقراء الرياضي))

أولاً :

عندما $(n = 1)$ تأخذ العلاقة $(*)$ الشكل الآتي :

$$L[t . f(t)] = (-1)\, \frac{d\,F(s)}{ds}$$

و هذا صحيح بملاحظة التالي :

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} . f(t) . dt \quad \langle\text{من الفرض}\rangle$$

ومنه وباشتقاق الطرفين بالنسبة لـ (s) مرة واحدة نجد :

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\int_0^{\infty} e^{-st} . f(t) . dt \xrightarrow{\text{حسب الخاصة الخطيّة}}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{d}{ds}[e^{-st} . f(t)] . dt = \int_0^{\infty} -t \,.\, e^{-st} . f(t) . dt$$

$$= -\int_0^{\infty} e^{-st}\,[t . f(t)] . dt = -L[t . f(t)]$$

إذاً :

$$-L[t . f(t)] = \frac{dF(s)}{ds} \Rightarrow L[t . f(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$ .. و هو المطلوب .

ملاحظة

نعلم أن مفهوم الإشتقاق هو :

$$y = f(x) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{d}{dx}}_{\text{"مؤثر الإشتقاق"}} . y$$

وبالتالي

$$y'' = (y')' = \frac{d}{dx} . y' = \frac{d}{dx} . \frac{d}{dx} . y$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{d^2}{dx^2} . y$$

و هكذا بالنسبة لجميع المراتب ومنه :

$$\left(y^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} . y\right)$$

ثانياً :

لنفرض أن العلاقة $(*)$ صحيحة من أجل (n) ولنبرهن صحتها من أجل $(n+1)$ كما يلي :

بحسب الفرض الإستقرائي لدينا : $\langle 1 \rangle \quad \left(L[t^n . f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}\right)$

ولنبرهن صحة العلاقة التالية :

$$\left(L[t^{n+1}.f(t)] = (-1)^{n+1}\frac{d^{n+1}F(s)}{ds^{n+1}}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{بحسب } \langle 1\rangle} L[t^{n+1}.f(t)] = L[t.(t^n.f(t))] = -(-1)^n\frac{d}{ds}.\frac{d^nF(s)}{ds^n} = (-1)^{n+1}\frac{d^{n+1}F(s)}{ds^{n+1}}$$

إذاً : فالعلاقة $(*)$ تكون صحيحة من أجل جميع قيم (n) أياً كانت : $n \geq 1$ ..

أمثلة

أوجد تحويل لابلاس $L[f(t)]$ إذا علمت أن :

$$f(t) = 1 - t + \frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}t^3$$

الحل : بما أن L مؤثر خطي فيمكننا أن نكتب :

$$L[f(t)] = L\left[1 - t + \frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}t^3\right] = L[1] - L[t] + \frac{1}{2!}L[t^2] - \frac{1}{3!}L[t^3]$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2!}.\frac{2!}{s^3} - \frac{1}{3!}.\frac{3!}{s^4} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^4}$$

$$f(t) = 3t^2 + 2e^{-t} - 5\cos t - \underbrace{4}_{4.t^0}$$

الحل :

$$L[f(t)] = 3L[t^2] + 2L[e^{-t}] - 5L[\cos t] - 4L[1]$$

$$= 3\frac{2!}{s^3} + 2\frac{1}{s+1} - 5\frac{s}{s^2+1^2} - 4\frac{1}{s} = \frac{6}{s^3} + \frac{2}{s+1} - \frac{5s}{s^2+1} - \frac{4}{s}$$

$$f(t) = \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$$

الحل :

نعلم أنه :

$$\boxed{\cos(x+y) = \cos x \,.\cos y - \sin x \,.\sin y \quad \langle\text{دستور النسبة المثلثية لمجموع زاويتين}\rangle}$$

$$\Rightarrow f(t) = \cos 3t \,.\cos\frac{\pi}{4} - \sin 3t \,.\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3t$$

$$\Rightarrow L[f(t)] = \frac{\sqrt{2}}{2} L[\cos 3t] - \frac{\sqrt{2}}{2} L[\sin 3t] = \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{s}{s^3 + 9} - \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{3}{s^2 + 9}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\, s - 3\sqrt{2}}{2s^2 + 18}$$

$$f(t) = e^{-3t} . \sin 2t$$

الحل :

$$L[\sin 2t] = \frac{2}{s^2 + 4} = F(s)$$

ومنه :

$$L[F(t)] = \frac{2}{(s+3)^2 + 4} = \frac{2}{s^2 + 6s + 13}$$

$$f(t) = t^3 . e^{-3t}$$

الحل : (طريقة أولى)

$$L[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3} = F(s)$$

$$L[f(t)] = L[t^3 . e^{-3t}] = (-1)^3 \frac{d^3 F(s)}{ds^3} \qquad (*)$$

ولكن :

$$\begin{cases} F'(s) = \dfrac{-1}{(s+3)^2} \\ F''(s) = \dfrac{2(s+3)}{(s+3)^4} = \dfrac{2}{(s+3)^3} \\ F'''(s) = \dfrac{-2.3.(s+3)^2}{(s+3)^6} = \dfrac{-6}{(s+3)^4} \end{cases} \Rightarrow L[f(t)] = -\frac{-6}{(s+3)^4} = \frac{6}{(s+3)^4}$$

(طريقة ثانية)

يمكننا أن نكتب :

$$f(t) = e^{-3t} . t^3 \Rightarrow L[t^3] = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4} = F(s)$$

وبالتالي :

$$L[f(t)] = L[e^{-3t} . t^3] = F(s+3) = \frac{6}{(s+3)^4}$$

$$f(t) = sin^2 t$$

الحل :

$$f(t) = sin^2 t \; = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$$

$$\Rightarrow L[f(t)] = \frac{1}{2}(L[1] - L[\cos 2t]) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)$$

قاعدة :

$$L[f(t)] = F(s) \Rightarrow L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s.F(s) - f(0)$$

البرهان :

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st}.\frac{df(t)}{dt}.dt$$

$$u = e^{-st} \Rightarrow du = -s.e^{-st}.dt \quad , \; dv = \frac{df(t)}{\cancel{dt}}.\cancel{dt} \Rightarrow v = f(t)$$

$$\Rightarrow L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \left[\frac{f(t)}{e^{st}}\right]_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-st}.f(t).dt = \big(0 - f(0)\big) + s.F(s)$$

$$\Rightarrow L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s.F(s) - f(0)$$

ومنه :

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s[s.F(s) - f(0)] - f'(0) \Rightarrow L[f''(t)] = s^2.F(s) - s.f(0) - f'(0)$$

إذاً نستنتج أن :

$$\begin{cases} L[f'(t)] = s.F(s) - f(0) \\ L[f''(t)] = s^2.F(s) - s.f(0) - f'(0) \\ L[f'''(t)] = s^3.F(s) - s^2.f(0) - s.f'(0) - f''(0) \\ L\left[f^{(4)}\right] = s^4.F(s) - s^3.f(0) - s^2.f'(0) - s.f''(0) - f'''(0) \end{cases}$$

وهكذا ..

تمرين :

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الآتية والذي من أجله يكون $x = 3$ عندما $t = 0$ ..

$$\frac{dx}{dt} + 2x = e^{-t}$$

الحل : لدينا $x = x(t)$ ولنفرض أن : $L[x(t)] = X(s)$

$$\Rightarrow L\left(\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] + 2x(t)\right) = L[e^{-t}] \Rightarrow L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] + 2L[x(t)] = \frac{1}{s+1}$$

$$s.X(s) - x(0) + 2X(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow s.X - 3 + 2X(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow X(s).(s+2) = 3 + \frac{1}{s+1} \Rightarrow X(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{3s+3+1}{(s+2)(s+1)}$$

$$= \frac{3s+4}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1}$$

$$\xRightarrow{\text{نوحد المقامات ونحذفها}} 3s + 4 = (A+B)s + (A+2B) \Rightarrow \begin{cases} A + B = 3 \\ A + 2B = 4 \end{cases} \Rightarrow B = 1 \,, A = 2$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow x(t) = L^{-1}[X(s)] = 2.L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] \Rightarrow x(t) = 2.e^{-2t} + e^{-t}$$

... وظيفة ...

أوجد تحويل لابلاس $L[f(t)]$ من أجل :

$$f(t) = t.\sin kt$$

$$f(t) = t.\cos kt$$

حيث : $k \in \mathcal{R}$

... انتهت المحاضرة (16) ...