وبالتالي L تقابل ، أي $V \cong F^n$

ملاحظة:

[1] ان كل الفضاءات الشعاعية المعرفة على حقل F وذات البعد n تكون متماثلة

[2] اذا كان $L: V \longrightarrow W$ تطبيق خطي فإن

$$\dim(V) = \dim(\ker(L)) + \dim(\mathrm{Im}(L)).$$

مثال: $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$L(x,y,z) = (x+y,\ y+z,\ z+x)$$

أوجد قاعدة وبعد كل من $\ker(L)$ ، $\mathrm{Im}(L)$

الحل: من المثال السابق $\ker(L) = \{(0,0,0)\}$

ومنه قاعدة $\ker(L)$ هي المجموعة الخالية و $\dim(\ker(L)) = 0$

وبالتالي $\dim(\mathrm{Im}(L)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

$$\mathrm{Im}(L) = \{L(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \{(x+y,\ y+z,\ z+x) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x(1,0,1) + y(1,1,0) + z(0,1,1) : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Span}(S)$$

حيث $S = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$

ومنه S قاعدة لـ $\mathrm{Im}(L)$

بما أن $\mathrm{Im}(L)$ كذلك فإننا نحتاج قاعدة له ونجد أن $\mathrm{Im}(L) = \mathbb{R}^3$ بعد

فتكون S قاعدة له وهو المطلوب.

انتهت المحاضرة

٦-٢- رتبة انعدامية تطبيق خطي:

٦-٢-١- تعريف: ليكن $L: V \longrightarrow W$ تطبيق خطي

○ نعرف رتبة التطبيق L بأنها بعد مستقر الصور (المجموعة الصورة المباشرة) ونرمز له بالرمز

$$\mathrm{rank}(L) = \dim(\mathrm{Im}(L))$$

○ نعرف انعدامية التطبيق L بأنها بعد نواة (L) ونرمز لها بالرمز

$$\mathrm{Nul}(L) = \dim(\ker(L)).$$

ملاحظة: [1] $\dim V = \mathrm{rank}(L) + \mathrm{Nul}(L)$

[2] $L: V \longrightarrow W$ تطبيق خطي و $\dim V = \dim W$ فإن L متباين $\Leftrightarrow$ L متباين

الإثبات: غامر $\iff Im(L) = W \iff \dim(Im(L)) = \dim W = \dim V$

$\iff Null(L) = 0 \iff 0 = \dim(\ker(L)) \iff \ker(L) = \{0\} \iff$ متباين

مثال: ليكن $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تطبيق خطي

$$L(x,y,z) = (x+2y-z,\ 2x+z,\ x-2y+z)$$

هل متباين، هل غامر. أوجد $Null(L)$ أو $rank(L)$؟

الحل: $\forall (x,y,z) \in \ker(L) : L(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow$

$L(x,y,z) = (x+2y-z,\ 2x+z,\ x-2y+z)$

$(0,0,0) = (x+2y-z,\ 2x+z,\ x-2y+z) \Rightarrow$

$$\left.\begin{matrix} 0 = x+2y-z \\ 0 = 2x+z \\ 0 = x-2y+z \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

مجموعة معادلات متجانسة تشكل محدد الأمثال

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & +1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$ للجملة حل صفري

$\Leftarrow$ $\ker(L) = (0,0,0)$ ومنه متباين وبما أن بعد المنطلق يساوي البعد المستقر يساوي 3 فإن غامر.

ايجاد النواة: لحل جملة المعادلات الخطية: $x+2y+2x=0 \Leftarrow z=2x$

$\Leftarrow x=y=z=0 \Leftarrow x-(-3x)+(-2x)=0 \Leftarrow 2y=-3x \Leftarrow$

$Null(L) = \dim(\ker(L)) = 0$ ومنه $\ker(L) = \{(0,0,0)\}$

وبما أن $\dim \mathbb{R}^3 = Null(L) + rank(L)$

$3 = 0 + rank(L) \Rightarrow rank(L) = 3.$

٦-٢-٦: مبرهنة هامة جداً: اذا كانت $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ قاعدة في فضاء شعاعي V على حقل K وكانت المجموعة الاختيارية الجزئية $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ من الفضاء W المعرف على الحقل K فإنه يوجد تطبيق خطي وحيد $L: V \to W$ يحقق $L(v_i) = w_i\ ;\ \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$.

الإثبات: $\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\ ;\ \lambda_i \in K$

يكتب بشكل وحيد كتركيب خطي بدلالة عناصر S.

لنكن العلاقة $L: V \to W$ المعرفة:

$$\forall v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i : L(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$$

١- L تطبيق: بما أن كل عنصر $v \in V$ يكتب بشكل وحيد بدلالة عناصر S أي أن احداثياته $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ وحيدة بالنسبة للقاعدة S ومنه يكون له صورة وحيدة في الفضاء W.

/ /

٢- مافرض: $\forall u=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i ,\ v=\sum_{i=1}^{n}\mu_i v_i \in V$:

$L(u+v)=L\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+\mu_i)v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+\mu_i)w_i$

$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i w_i+\sum_{i=1}^{n}\mu_i w_i=L(u)+L(v)$

$\forall \lambda\in K\ \forall v=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i\in V$:

$L(\lambda u)=L\left(\lambda\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i\right)=L\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda\lambda_i v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda\lambda_i w_i$

$=\lambda\sum_{i=1}^{n}\lambda_i w_i=\lambda(L(v))$

وبالتالي يوجد $L:V\longrightarrow W$ تطبيق خطي يحقق

$\forall i\in\{1,2,\dots,n\}: L(v_i)=L(1v_i)=1w_i=w_i$

٣- الوحدانية:

ليكن $T:V\longrightarrow W$ تطبيق خطي:

$\forall i\in\{1,2,\dots,n\}: T(v_i)=w_i$

$\forall v=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i\in V: T(v)=T\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i\right)$

$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i T(v_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i w_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i L(v_i)=L\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i\right)$

$=L(v)$ وبما أن T و L لهما نفس المنطلق والمستقر

و $\forall v\in V: L(v)=T(v)$ فيكون L يساوي T أي L تطبيق وحيد.

٦-٢-٢: مبرهنة: إذا كانت S مستقلة خطياً في فضاء V معرف على الحقل K وكان $L:V\longrightarrow W$ تطبيق خطي متباين فإن مجموعة صور عناصر S مستقلة خطياً في W.

الإثبات: لتكن $T=\{L(v_1),L(v_2),\dots,L(v_n)\}$ مجموعة صور عناصر S

نوجد العلاقة في $0=\lambda_1L(v_1)+\lambda_2L(v_2)+\dots+\lambda_nL(v_n)$

$0=L(\lambda_1v_1)+L(\lambda_2v_2)+\dots+L(\lambda_nv_n)$

$\Rightarrow \lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_nv_n\in \ker(L)$

ولكن L متباين أي $\ker(L)=\{0\}$

$\Rightarrow \lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_nv_n=0$

وبما أن S مستقلة خطياً $\Leftarrow$ $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$

ومنه T مستقلة خطياً.

/ /

ملاحظة: (1) ليكن $L: V \to W$ تطبيق خطي.

ⓞ اذا كان كقاعدة لـ V فإن مجموع صور كقاعدة لـ $Im(L)$

(ii) اذا كان متباين و كقاعدة لـ V و $\dim V = \dim W$ فإن صور عناصر كقاعدة لكامل W.

(iii) اذا كان متماثل و كقاعدة لـ V فإن صور عناصر كقاعدة لـ W

مثال: ليكن $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ تطبيق خطي:

$L(x, y) = (2x - y, x + 2y, x - y)$

1) بين أن متباين. هل غامر.

2) أثبت أن $S = \{v_1 = (1,2), v_2 = (2,1)\}$ قاعدة لـ $\mathbb{R}^2$.

3) أوجد صورة كـ و بين أنها قاعدة لـ $Im(L)$.

الحل: 1) متباين:

$\forall (x,y) \in Ker(L): L(x,y) = (0,0,0)$ $\Rightarrow$

$L(x,y) = (2x - y, x + 2y, x - y)$

$(0,0,0) = (2x-y, x+2y, x-y) \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow$

$ker(L) = \{0,0\}$

ومنه متباين.

نوجد $Im(L)$

$Im(L) = \{L(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{(2x-y, x+2y, x-y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{x(2,1,1) + y(-1,2,-1) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

$T = \{v_1(2,1,1), v_2(-1,2,-1)\}$ حيث $Im(L) = Span\,T$

نثبت أن T مستقلة خطياً وبالتالي T قاعدة لـ $Im(L)$ ومنه

$\dim(Im(L)) = 2 < \dim \mathbb{R}^3 = 3$

ومنه $Im(L) \neq \mathbb{R}^3$ أي L ليس غامر.

أو طريقة ثانية: ومن ملاحظة سابقة:

$\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(ker(L)) + \dim(Im(L))$.

$2 = 0 + \dim(Im(L)) \Rightarrow 2 = \dim(Im(L)) < \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

وبالتالي $Im(L) \neq \mathbb{R}^3$ ومنه L ليس غامر.

$\boxed{2}$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ وبالتالي فهي مستقلة خطياً وعددها عناصرها يساوي بعد الفضاء $\mathbb{R}^2$ ويساوي 2 ومنه كقاعدة لـ $\mathbb{R}^2$

$\boxed{3}$

$L(v_1)=L(1,2)=(0,5,-1)$

$L(v_2)=L(2,1)=(3,4,1)$

$S'=\{v'_1=(0,5,-1), v'_2=(3,4,1)\}$ ومنه صورة S هي

NOTE: يوجد باقي للحل.

تمارين: I: $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ تطبيق خطي، ولتكن $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ القاعدة القانونية لـ $\mathbb{R}^3$ حيث

$L(e_1)=(2,0,1)$, $L(e_2)=(0,1,1)$, $L(e_3)=(1,1,1)$

فأوجد قاعدة اقتران L وبين أنه تقابل.

II: $L:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ تطبيق خطي

$L:(x,y,z,t)=(x-y+t,\ y-z,\ z-t-x)$

1) أوجد قاعدة وبعد $Ker(L)$, $[Nul(L)]$

2) أوجد قاعدة وبعد $Im(L)$, $[rank(L)]$

V فضاء شعاعي معرف على حقل K و W, W_1, W_2 فضاءات شعاعية جزئية في V و

$W=W_1\cup W_2 \iff W_1\subseteq W_2$ أو $W_2\subseteq W_1$

$\Leftarrow$: $\begin{cases} W_1\subseteq W_2 \\ W_2\subseteq W_1\end{cases}$ $W_2=W=W_1\cup W_2$; $W_1=W=W_1\cup W_2$ وفي كلا الحالتين W_1 و W_2 فضاءات جزئية في $W_1\cup W_2$

$\Rightarrow$: نفرض جدلا أن $W_1\not\subseteq W_2 \Rightarrow \exists w_1\in W_1,\ w_1\notin W_2$

$W_2\not\subseteq W_1 \Rightarrow \exists w_2\in W_2,\ w_2\notin W_1$

$w_1, w_2\in W=W_1\cup W_2 \Longrightarrow w_1+w_2\in W=W_1\cup W_2$

اما: $w_1+w_2\in W_1$: $w_2=\underbrace{(w_1+w_2)}_{\in W_1}-\underbrace{w_1}_{\in W_1} \Rightarrow \in W_1$

وهذا غير ممكن.

أو: $w_1+w_2\in W_2$: $w_1=\underbrace{(w_1+w_2)}_{\in W_2}-\underbrace{w_2}_{\in W_2} \Rightarrow \in W_2$

وهذا غير ممكن وبالتالي في كلا الحالتين الفرض الجدلي خاطئ إذا $W_1\subseteq W_2$ أو $W_2\subseteq W_1$

انتهت المحاضرة