بعض المسائل التطبيقية على المستقيم:

★ ايجاد معادلة مستقيم يقطع مستقيمين معلومين ويوازي شعاع معلوم:

ليكن لدينا المستقيمين

$$D_1 \begin{cases} p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0 \\ p_2x+q_2y+r_2z+h_2=0 \end{cases} \qquad D_2 \begin{cases} p_3x+q_3y+r_3z+h_3=0 \\ p_4x+q_4y+r_4z+h_4=0 \end{cases}$$

وليكن لدينا الشعاع $\vec{V}(u,v,w)$ المطلوب ايجاد معادلة مستقيم D يقطع المستقيمين D_1 و D_2 ويوازي V.

أ): الحل الفراغي: ان المستقيم المطلوب هو وأحد المستقيمين وليكن D_1 يشكلان مستوية ولتكن Q' يوازي V وكذلك المستقيم المطلوب والمستقيم D_2 يشكلان مستوية Q'' ان المستقيم المطلوب ماهو الا الفصل المشترك للمستويين Q' و Q''.

ب): الحل التحليلي: 1): نقوم بإيجاد حزمة المستويات المارة من المستقيم D_1 ونختار من هذه الحزمة مستوية يوازي V

2): نقوم بإيجاد حزمة المستويات المارة من المستقيم D_2 ونختار من هذه الحزمة مستوية يوازي V. ان المستقيم المطلوب ماهو الا الفصل المشترك للمستويين السابقين.

نوضح ما سبق من خلال المثال التالي:

أوجد معادلتي المستقيم القاطع للمستقيمين:

/ /

$$D_2 \begin{cases} 2x+y-1=0 \\ y+z-4=0 \end{cases} \qquad D_1 \begin{cases} x-y+z=0 \\ x-2z-2=0 \end{cases}$$

الموازي للمتجه $\vec{V}(1,5,-3)$ ؟

الحل (٦): نقوم بإيجاد حزمة المستويات المارة من المستقيم D_1:

$Q_\lambda \equiv (1+\lambda)x - y + (1-2\lambda)z - 2\lambda = 0$ $\quad \vec{N}_\lambda(1+\lambda, -1, 1-2\lambda)$

المستوي المطلوب يوازي V $\Leftarrow$ ان ناظم هذا المستوي يعامد V

أي هو $\vec{N}_\lambda \perp \vec{V} \Leftrightarrow \vec{N}_\lambda \cdot \vec{V} = 0 \Leftarrow$

$1(1+\lambda) + 5(-1) - 3(1-2\lambda) = 0$

$\Rightarrow 1+\lambda-5-3+6\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$

$\Rightarrow \boxed{Q_{\lambda=1} \equiv 2x - y - z - 2 = 0}$ ... ①

ج): نقوم بإيجاد حزمة المستويات المارة من D_2:

$Q_\mu \equiv 2x + (1+\mu)y + \mu z - 1 - 4\mu = 0$ $\quad \vec{N}_\mu(2, 1+\mu, \mu)$

نختار من هذه الحزمة مستويا يوازي $\vec{V}$ أي أن $\vec{N}_\mu \cdot \vec{V} = 0 \Leftrightarrow \vec{N}_\mu \perp \vec{V}$

$\vec{N}_\mu \cdot \vec{V} = 0 \Leftrightarrow 1\cdot 2 + 5(1+\mu) - 3\mu = 0 \Rightarrow \boxed{\mu = -\frac{7}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{Q_{\mu=-\frac{7}{2}}\ 2x - \frac{5}{2}y - \frac{7}{2}z + 13 = 0}$ ... ②

المستقيم المطلوب D في ① و ②

معادلة العمود المشترك لمستقيمين معلومين:

ان هذه المسألة تؤدي إلى المسألة السابقة حيث أن المستقيم المطلوب يوازي منحى الشعاع $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ حيث $\vec{V}_1$ منحى المستقيم D_1 و $\vec{V}_2$ منحى المستقيم D_2 ونوضح ما سبق من خلال المثال التالي:

مثال: أوجد معادلتي العمود المشترك للمستقيمين D_1 و D_2 الموضحين في المثال السابق

$$D_1 \begin{cases} x-y+z=0 & \vec{N}_1(1,-1,1) \\ x-2z-2=0 & \vec{N}_2(1,0,-2) \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_1 = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

$$D_2 \begin{cases} 2x+y-1=0 & \vec{N}_3(2,1,0) \\ y+z-4=0 & \vec{N}_4(0,1,1) \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_2 = \vec{N}_3 \wedge \vec{N}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_2 = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

إذن V المطلوب هو:

/ /

$$\vec{V} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 3\vec{j} - 7\vec{k}$$

اذن ادت المسألة إلى المسألة السابقة حيث أصبح المطلوب ايجاد معادلة المستقيم المتقاطع للمستويين P_1 و P_2 والموازي للشعاع $\vec{V}(8, -3, -7)$
ونتابع الحل كما في المثال السابق.

- تقاطع مستقيم ومستوي:

لدراسة تقاطع مستقيم مع مستوي نميز حالتين

الحالة الأولى: اذا كان المستقيم معطى وسيطياً
في هذه الحالة نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي فنحصل على معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو الوسيط وهنا نميز الحالات التالية:

أ): اذا كان للمعادلة حل وحيد ⟸ ان المستقيم يقطع المستوي بنقطة واحدة ومن أجل تعيين احداثيات هذه النقطة نعوض قيمة الوسيط في المعادلات الوسيطية.

ب): اذا كانت المعادلة مستحيلة الحل ⟸ ان المستقيم لا يشترك مع المستوي بأية نقطة أي أن المستقيم موازي للمستوي.

ج): اذا كان للمعادلة عدد لانهائي من الحلول أي أن المستقيم يشترك مع المستوي بأكثر من نقطة وبالتالي فالمستقيم بأكمله يقع ضمن المستوي

الحالة الثانية: اذا كان المستقيم معطى بتقاطع مستويين:
هنا نحصل على جملة معادلات خطية ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل نحسب محدد الأمثال det ونميز حالتين:

أ): $det \neq 0$ ⟸ إن للجملة حل وحيد وبالتالي فالمستقيم يشترك مع المستوي بنقطة واحدة ومن أجل تعيين احداثيات هذه النقطة نقوم بحل جملة المعادلات حل مشترك.

ب): $det = 0$ ونميز حالتين: للمعادلات الثلاث عدد لا نهائي من الحلول وهذا يعني إذا كانت المستويات الثلاث مشتركة بحل مشترك واحد.
ليس للمعادلات الثلاثة حل وبالتالي المستويات لا تتقاطع معاً بأية نقطة ويكون المستقيم موازياً للمستوي.

مثال: بين وضع المستقيم المعطى بالمعادلات الوسيطية بالنسبة للمستويات

$$\begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \begin{aligned} Q_1 &: x+y+z+4=0 \\ Q_2 &: x+2y+z+5=0 \\ Q_3 &: x+4y-z+6=0 \end{aligned}$$

بالنسبة لـ Q_1: $2-3\lambda+1+\lambda+\lambda+4=0$

$\Rightarrow -\lambda = 7 \Rightarrow \boxed{\lambda=-7}$

وبالتالي المعادلة لها حل وحيد ⟸ المستقيم يقطع المستوي Q_1 من أجل تعيين احداثيات نقطة التقاطع $x=-19,\ y=-6,\ z=-7$

نقطة التقاطع $(19, -6, -7)$

بالنسبة لـ Q_2: $2-3\lambda+2(1+\lambda)+\lambda+5=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=-9}$

أي أن المعادلة مقبولة الحل وبالتالي المستقيم لا يشترك مع المستوي بأية نقطة.

أي أن المستقيم موازي لـ Q_2.

بالنسبة لـ Q_3: $2-3\lambda+4(1+\lambda)-\lambda-6=0$

$2-3\lambda+4+4\lambda-\lambda-6=0 \Rightarrow 0\lambda=0$

وبالتالي فإن للمعادلة عدد لا نهائي من الحلول أي أن المستقيم يشترك مع المستوي بأكثر من نقطة وبالتالي فالمستقيم يحتوي Q_3

تمرين: ادرس تقاطع المستقيم مع المستويات السابقة.

$$D \begin{cases} x+y+2z-2=0 \\ x-2y+5z=0 \end{cases}$$

التناظر بالنسبة للمستوي: لتكن لدينا النقطتين $M_1(x_1,y_1,z_1)$ و $M_2(x_2,y_2,z_2)$ نقول أن النقطة M_2 نظيرة M_1 بالنسبة للمستوي Q اذا كان المستوي Q يبادل M_1, M_2 ⟸ ناظم المستوي Q يوازي M_1M_2

أي تتحقق العلاقة

$$\frac{x_2-x_1}{2} = \frac{y_2-y_1}{2} = \frac{z_2-z_1}{2} \quad \text{--- (1)}$$

$$M_0\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right) \in (1)$$

فإحداثياتها تحقق معادلة هذا المستوي ⟸

$$p\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + q\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) + r\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) + h = 0 \ \dots \ (2)$$

من العلاقتين (1) و (2) نحصل على جملة (3) معادلات بـ (3) مجاهيل

/ /

في احداثيات النقطة M_2 أو بطريقة أخرى نكتب المعادلات ② بالشكل الوسيطي حيث نكتب (x_2, y_2, z_2) احداثيات M_2 ثم نعوضهما في المعادلة ② نحصل على قيمة الوسيط λ نعوض هذه القيمة مرة أخرى في المعادلات الوسيطية نحصل على احداثيات M_2.

نوضح ما سبق بالمثال التالي:

- أوجد نظير النقطة $M_1(1,2,-4)$ بالنسبة للمستوي $Q: x+y+z+1=0$

نفرض أن $M_2(x_2,y_2,z_2)$ نظيرة M_1 بالنسبة للمستوي Q عندئذ:

$$\frac{x_2-1}{1} = \frac{y_2-2}{1} = \frac{z_2+4}{1} \Rightarrow \frac{x_2-1}{1} = \lambda \Rightarrow \boxed{x_2 = 1+\lambda}$$

$$\frac{y_2-2}{1} = \lambda \Rightarrow y_2 - 2 = \lambda \Rightarrow \boxed{y_2 = 2+\lambda}$$

$$\frac{z_2+4}{1} = \lambda \Rightarrow \boxed{z_2 = -4+\lambda}$$

$$M_0\left(\frac{x_2+1}{2}, \frac{y_2+2}{2}, \frac{z_2-4}{2}\right) \in Q$$

نعوض في معادلة Q

$$\frac{x_2+1}{2} + \frac{y_2+2}{2} + \frac{z_2-4}{2} + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x_2 + y_2 + z_2 + 1 = 0 \quad \ldots (*)$$

نعوض المعادلات الوسيطية في المعادلة $(*)$:

$$1+\lambda+2+\lambda-4+\lambda+1 = 0 \Rightarrow 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

نعوض في $x_2 = 1,\ y_2 = 2,\ z_2 = -4$

وبالتالي $M_2(1,2,-4)$

وبالتالي نظيرة النقطة M_1 هي النقطة M_1 نفسها ⇐ النقطة M_1 تقع في المستوي.

مثال: أوجد نظير النقطة $M_1(1,0,1)$ بالنسبة لـ $Q: x-y+2z+1=0$

- نظير مستوي بالنسبة لمستوي آخر:

ليكن لدينا المستويان $Q: px+qy+rz+h=0$ و $Q_1: p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0$

د) المطلوب إيجاد معادلة المستوي Q_2 نظير Q_1 بالنسبة لـ Q:
اعتماداً على تعريف نظير نقطة بالنسبة للمستوي نفرض أن $M_1(x_1,y_1,z_1)$ نقطة من المستوي Q_1 ولنقوم بإيجاد نظيرتها $M_2(x_2,y_2,z_2)$ بالنسبة للمستوي Q_2 وبما أن M_1 نقطة في المستوي Q_1 فهي تحقق معادلته نرمز هذه المعادلة إلى المعادلات الثلاث التي وجدناها بالحالة السابقة نقوم بإيجاد علاقة تربط بـ (x_2,y_2,z_2) احداثيات M_2 التي من خلالها نتوصل إلى معادلة المستوي المطلوب نوضح ما سبق بالمثال التالي:

أوجد نظير المستوي: $Q_1 \equiv 2x+y-z+1=0$ بالنسبة $Q \equiv x+2y-3z=0$.

الحل: نفرض $M_1(x_1,y_1,z_1)$ نقطة من المستوي Q_1 ، $M_1(x_1,y_1,z_1)\in Q_1$ نظيرتها $M_2(x_2,y_2,z_2) \in Q_2$
و M_0 منتصف M_1M_2 احداثياتها $M_0\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ عندئذ يتحقق التالي:

$$\frac{x_2+x_1}{1}=\frac{y_2-y_1}{2}=\frac{z_2-z_1}{3} \quad ①$$

عندئذ يكون

$$\frac{x_2+x_1}{2}+2\,\frac{y_2+y_1}{2}-3\,\frac{z_2+z_1}{2}=0$$

$$x_2+x_1+2y_2+2y_1-3z_2-3z_1=0 \quad ②$$

نكتب المعادلات ① بالشكل الوسيطي $x_1=x_2-\lambda$

$y_1=y_2-2\lambda$, $z_1=z_2-3\lambda$

نعوض المعادلات الوسيطية بالمعادلة ② نحصل على قيمة الـ λ بدلالة (x_2,y_2,z_2) ثم نعوضها في المعادلات الوسيطية ونكون قد حصلنا على ثلاث علاقات تربط احداثيات النقطة M_1 بإحداثيات M_2 ولكن M_1 تنتمي إلى Q_1 فإحداثياتها تحقق معادلته نعوض في معادلة Q_1 نحصل على معادلة بـ (x_2,y_2,z_2) هي معادلة المستوي المطلوب.