المحاضرة السابعة عشر

5/12/2013

الفصل الثامن

الحركة الحصلة لنقطة مادية

جملة الإحداثيات المتحركة وأثرها على المتجهات ومشتقاتها:

لتكن S مجموعة متماسكة ولنعرّف عليها الجملة $oxyz$ ولتكن S_1 جملة ثابتة ولنعرّف عليها الجملة $o_1x_1y_1z_1$ وليكن $\vec{A}$ متجهاً متغيراً بالنسبة للجملة S.

$$\vec{A}\Big|_M = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

عندما يتغير $\vec{A}$ فإن أي راصد متماسك مع الجملة المتحركة يلاحظ تغيره كما يأتي:

$$\vec{A}\Big|_F = A_{x_1}\vec{i_1} + A_{y_1}\vec{j_1} + A_{z_1}\vec{k_1}$$

عندما يتغير $\vec{A}$ فإن أي راصد متماسك مع الجملة الثابتة يلاحظ تغيره. ($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) مقادير متغيرة.

العلاقة بين $\vec{A}\Big|_M$ و $\vec{A}\Big|_F$:

يميز الحالات التالية:

① حركة S بالنسبة لـ S_1 انسحابية:

$$\vec{i_1} = \vec{i}\ ,\ \vec{j_1} = \vec{j}\ ,\ \vec{k_1} = \vec{k}$$

$$\vec{A}\Big|_F = \vec{A}\Big|_M$$

$$A_x = A_{x_1}\ ,\ A_y = A_{y_1}\ ,\ A_z = A_{z_1}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}\Big|_F = \frac{d\vec{A}}{dt}\Big|_M$$

أي أن مشتق المتجه $\vec{A}$ لا يتأثر بحركة الجملة S لذا تسمى جملة الإحداثيات المتحركة بحركة انسحابية بجملة عطالية.

② حركة S بالنسبة لـ S_1 دورانية حول نقطة ثابتة:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}\Big|_F = \dot{A}_x\vec{i} + \dot{A}_y\vec{j} + \dot{A}_z\vec{k} + A_x(\vec{\omega}\wedge\vec{i}) + A_y(\vec{\omega}\wedge\vec{j}) + A_z(\vec{\omega}\wedge\vec{k})$$

$$= \frac{d\vec{A}}{dt}\Big|_M + \vec{\omega} \wedge (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})$$

$$= \frac{d\vec{A}}{dt}\Big|_M + \vec{\omega} \wedge \vec{A} \qquad (*)$$

شعاع الدوران الآني

③ حركة S عامة بالنسبة لـ Σ :

بما أن الحركة العامة هي انسحاب مع القطب ودوران حول القطب ، ولكن رأينا أن الانسحاب لا يؤثر على المتجهات ومشتقاتها فالعلاقة (*) تصبح باستخدام المؤثر التفاضلي على كمية شعاعية على النحو التالي:

$$D\Big|_{\underset{\text{ثابتة}}{F}} = D\Big|_{\underset{\text{متحركة}}{M}} + \vec{\omega} \wedge \dots$$

لكن بتطبيق العلاقة (سؤال) على الشعاع $\vec{\omega}$ نجد أن:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_F = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_M + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega}$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_F = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_M$$

محصلة حركتين لنقطة مادية:

لتكن M نقطة مادية متحركة بالنسبة لـ S فإذا كانت S بدورها متحركة بالنسبة لمجموعة متماسكة أخرى فإننا نعرف الحركات التالية:

- الحركة النسبية للنقطة M : (سؤال)

هي حركة النقطة M بالنسبة لراصد متماسك مع S

- الحركة الجرية للنقطة M :

هي حركة النقطة P في الجملة S والتي تنطبق في اللحظة t مع النقطة M بالنسبة للجملة S_1 .

- الحركة المطلقة للنقطة M :

هي حركة M بالنسبة للجملة S_1 مباشرة (سؤال) (وهي الحركة المحصلة للنسبية مع الجرية)

مثال.

- راكب يتحرك في الباخرة أن حركته بالنسبة لشئ ثابت في الباخرة هي حركة نسبية.
- إذا جلس الراكب و مرّت الباخرة بجوار جزيرة فإن حركة الراكب مع الباخرة بالنسبة للجزيرة هي حركة جرّية.
- أمّا حركة الراكب على الباخرة بالنسبة لراصد على الجزيرة هي حركة مطلقة،

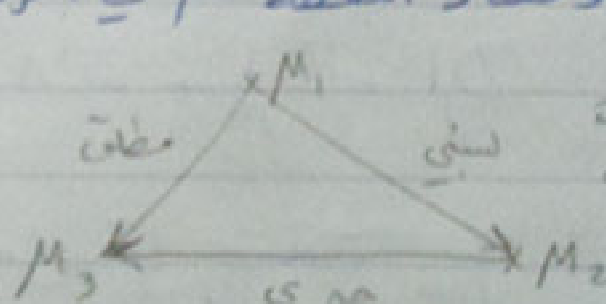
ونعرّف المسارات التالية:

المسار النسبي:

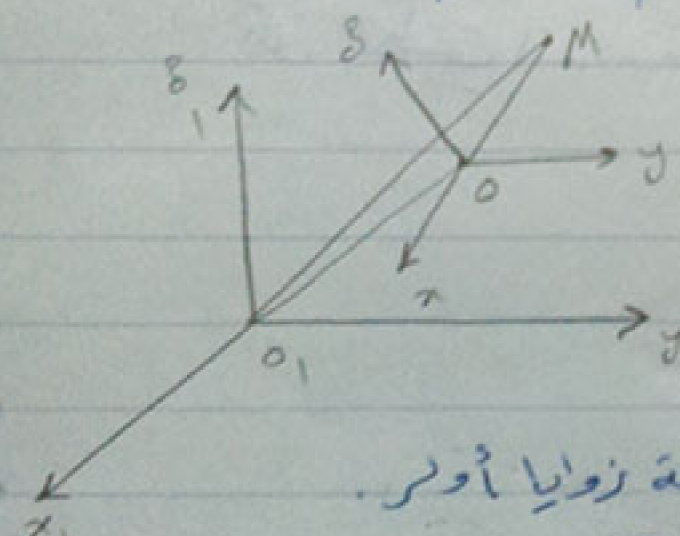
هو مسار النقطة M في الحركة النسبية : $M_1 \longrightarrow M_2$ نسبي

جري $M_2 \longrightarrow M_3$

مطلق $M_1 \longrightarrow M_3$



سؤال؟ ألا توجد مسارات إضافية؟



تعيين شعاع الموضع للنقطة M :

$$\vec{O_1M} = \vec{O_1O} + \vec{OM}$$

$$= \vec{O_1O} + (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

إن $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ مقادير متغيرة و تتعين بدلالة زوايا أولر.

. نعيّن ω دوران الجملة S بالنسبة لـ S.

$$\vec{v}_a(M) = \frac{d\vec{O_1M}}{dt}\Big|_F = \frac{d\vec{O_1O}}{dt}\Big|_F + \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_F$$

$$= \vec{v}(O) + \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_M + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

$$= \vec{v}(O) + \vec{v}_r(M) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

$$= \vec{v}_r(M) + \underbrace{\vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}}_{v_e(M)}$$

سؤال

مثال: M نقطة تتحرك على مستقيم Oz الذي يدور حول محور دوران Δ
لان حركة M على المستقيم هي حركة نسبية وبالتالي سرعتها النسبية
محمولة على المستقيم z.
أما حركة M الجرية هي دورانية حول محور Δ وسرعتها الجرية هي دورانية
حول Δ وهي محمولة على المماس للدائرة التي ترسمها M حول Δ.

التسارع المطلق:

لدينا
$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{v}_r + \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

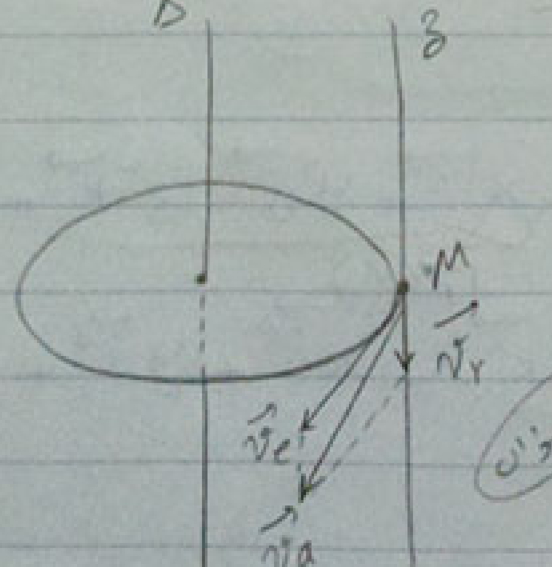
$$\vec{\Gamma}_a(M)\Big|_F = \frac{d\vec{v}_r}{dt}\Big|_F + \frac{d\vec{v}(O)}{dt}\Big|_F + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_F \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_F$$

$$= \frac{d\vec{v}_r}{dt}\Big|_F + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_M + \vec{\omega} \wedge \vec{OM} \right)$$

$$= \underbrace{\vec{\Gamma}_r(M)}_{\text{تسارع نسبي}} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$$

$$= \underbrace{\vec{\Gamma}_r(M)}_{\text{تسارع نسبي}} + \underbrace{\vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})}_{\text{تسارع جري}} + \underbrace{2\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r}_{\text{التسارع المتمم}}$$

سؤال



$\vec{v}_e$ سرعة جرية

سؤال