المحاضرة التاسعة عشر

التابع التوافقي:

بفرض $u = u(x,y)$ تابع حقيقي قابل للاشتقاق على المنطقة D ومشتقاته الجزئية مستمرة على D عندئذٍ نقول عن u أنه توافقي إذا حقق معادلة لابلاس:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

تمرين: أثبت أن التابع $u = u(x,y) = y + 2xy$ توافقي على $\mathbb{C}$.

الحل: نلاحظ أن التابع u هو كثير حدود بمتحولين فهو معرّف ومستمر وقابل للاشتقاق على $\mathbb{C}$ كما أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y \ , \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 + 2x \ , \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{(معادلة لابلاس)}$$

محققة دوماً والتابع u توافقي على $\mathbb{C}$

مبرهنة: بفرض $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تابع تحليلي على المنطقة D عندئذٍ u, v توافقيان على D

الإثبات:

بما أن التابع $f(z)$ على المنطقة D عندئذٍ معادلتي كوشي - ريمان محققتان ومنه:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

وبما أن المشتقات الجزئية لـ u مستمرة فإن:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$

ومنه u توافقي على D

وبنفس الطريقة نثبت أن v توافقي على D

هامة جداً

ملاحظة: نسمي في هذه الحالة u مرافقاً توافقياً للتابع v.
كذلك v مرافقاً توافقياً للتابع u.
فإذا أعطينا أحدهما نستطيع إيجاد الآخر بحيث يكون: $w=f(z)=u+iv$
تحليلي وذلك بالاعتماد على معادلتي كوشي - ريمان.

سؤال دورة

تمرين: أثبت أن التابع: $u=u(x,y)=x^2-y^2+2xy+x$
توافقي على $\mathbb{C}$ ثم أوجد مرافقاً توافقياً له $v=v(x,y)$ بحيث
يكون $w=f(z)=u+iv$ تحليلي.

نلاحظ أن التابع u هو كثير حدود بالمتغيرين فهو معرف ومستمر وقابل للاشتقاق على $\mathbb{C}$

الحل: لنتحقق من معادلة لابلاس:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2y+1 \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y+2x \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$$

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2+(-2)=0$$

ومنه معادلة لابلاس محققة والتابع توافقي
دوماً
على $\mathbb{C}$

وبالتالي يصبح لدينا تحليلي وبالتالي تحقق معادلتي كوشي ريمان

- لنفرض أن $v=v(x,y)$ مرافق توافقي لـ u عندئذٍ معادلتي كوشي -
ريمان محققتان:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}=2x+2y+1 \quad (1), \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=2y-2x \quad (2)$$

نكامل (1) بالنسبة لـ y فنجد:

$$v=\int(2x+2y+1)\,dy=2xy+y^2+y+g(x) \quad (3)$$

تابع

$$\mathbb{C}[x,y]=\mathbb{C}[x][y]$$

نشتق ③ بالنسبة لـ x فنجد:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + g'(x) \quad --- \quad (4)$$

بمقارنة ② مع ④ فنلاحظ:

$$g'(x) = -2x$$

نكامل بالنسبة لـ x فنجد:

$$g(x) = -x^2 + C$$

نعوض في ③ فنجد:

$$\boxed{v = v(x,y) = 2xy + y^2 + y - x^2 + C} \quad ; \; C \in \mathbb{R}$$

مجموعة المرافقات التوافقية للتابع u.

* وظيفة: أعد حل التمرين السابق من أجل $u = u(x,y) = xy - x + 1$