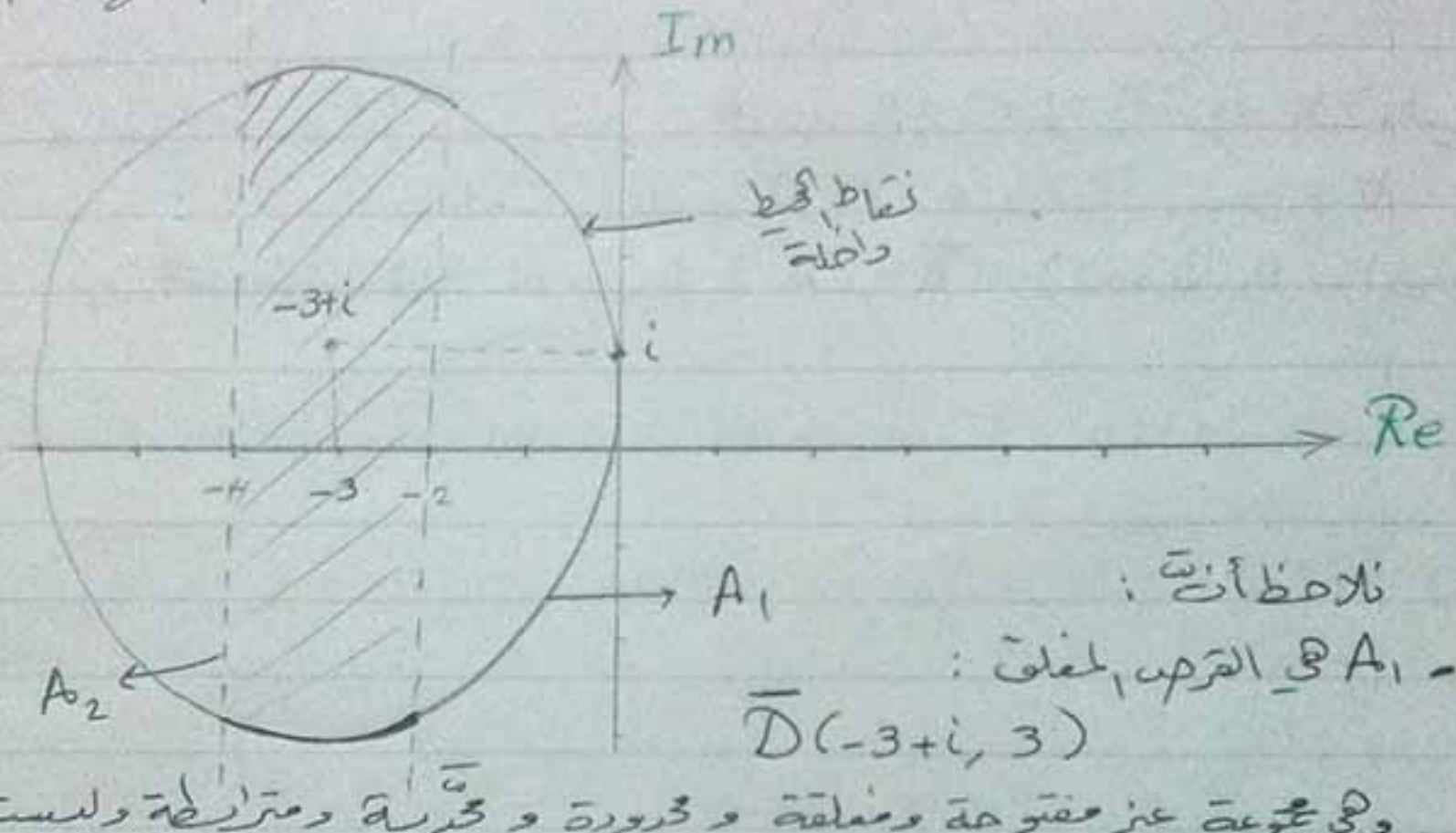
24/11/2013

المحاضرة الخامسة عشر

تمرين: مثّل المجموعات النقطية التالية هندسياً في المستوى العقدي ثم ادرسها طبولوجياً.

1 $A_1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z+3-i| \leq 3 \}$ 2 $A_2 = \{ z \in \mathbb{C} : -4 < Re(z) < -2 \}$



نلاحظ أنّ:

- A_1 هي القرص المغلق: $\overline{D}(-3+i, 3)$ وهي مجموعة غير مفتوحة ومغلقة و محدودة و محدّبة ومترابطة وليست منطقة
- A_2 هي مجموعة مفتوحة وغير مغلقة وليست محدودة ومحدبة ومترابطة ومنطقة ولكنها ليست وحيدة الترابط.

$A \cup A_2$: مجموعة ليست مفتوحة لأنّ النقطة $i \in A_1 \cup A_2$ ليست داخلية وليست مغلقة، ليست محدبة، ليست محدودة ومترابطة، ليست منطقة

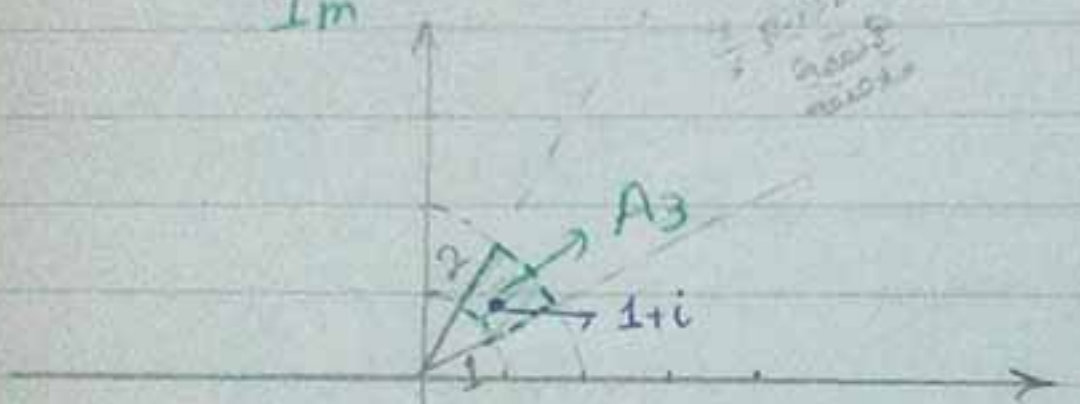
$A_1 \cap A_2$: هي مجموعة ليست مفتوحة وليست مغلقة، محدودة، محدبة، ومترابطة وليست منطقة

$A_1 - A_2$: ليست مفتوحة ولكنها مغلقة، محدودة وليست محدبة وليست مترابطة وليست منطقة.

سؤال: أوجد A_1° ، $\overline{A_1}$ ، $Fr(A_1)$

$A_1^\circ = D(-3+i, 3)$ ، $\overline{A_1} = A_1$ ، $Fr(A_1) = C(-3+i, 3)$

[3] $A_3 = \{ z \in \mathbb{C} ;\ 1 < |z| < 2 ,\ \frac{\pi}{6} < Arg(z) < \frac{\pi}{3} \}$



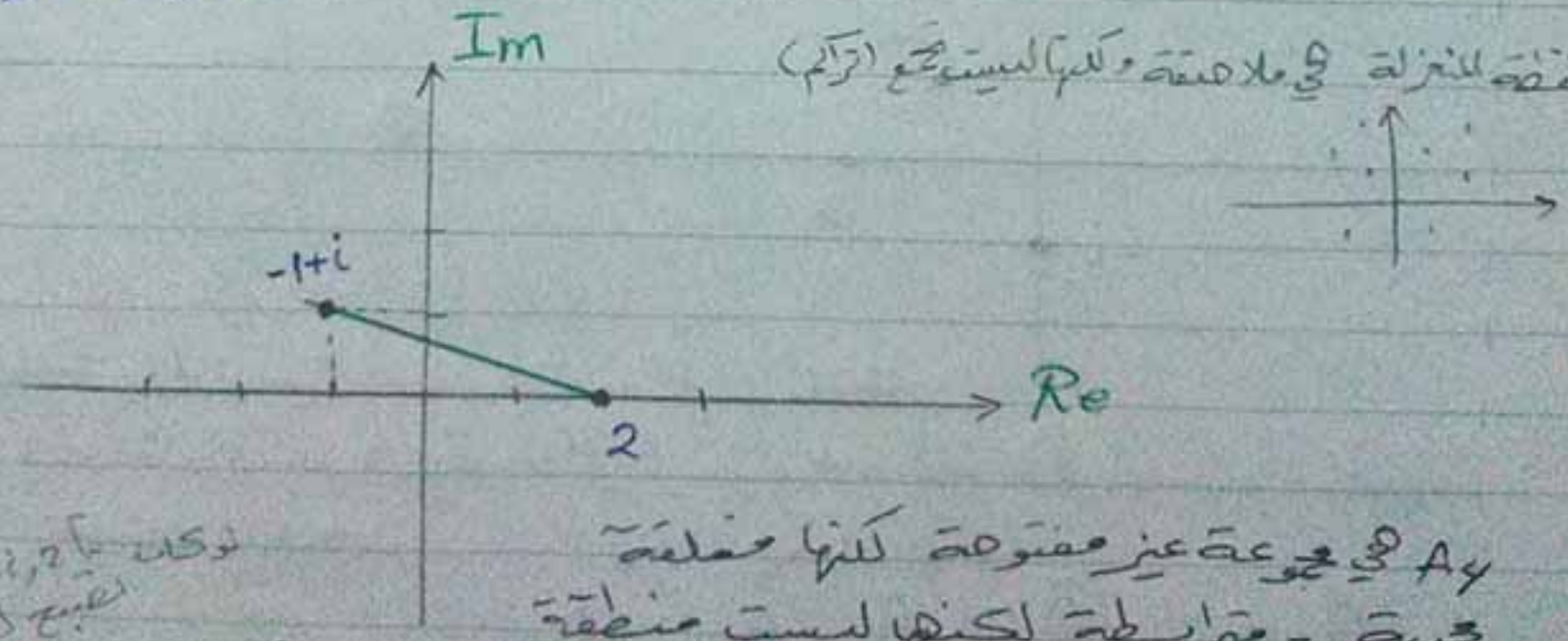
$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ هي نقطة ملاصقة
ولكنها لا تنتمي للمجموعة

نلاحظ أنّ A_3 مفتوحة وليست مغلقة وليست مغلقة
ومحدودة ، محدبة ، مترابطة ومنطقة وحيدة التّرابط

سؤال: هل $1+i$ نقطة داخلية ؟

الجواب: نعم لأنّ $D(1+i, \frac{\sqrt{2}-1}{2})$

[4] $A_4 = [-1+i, 2]$



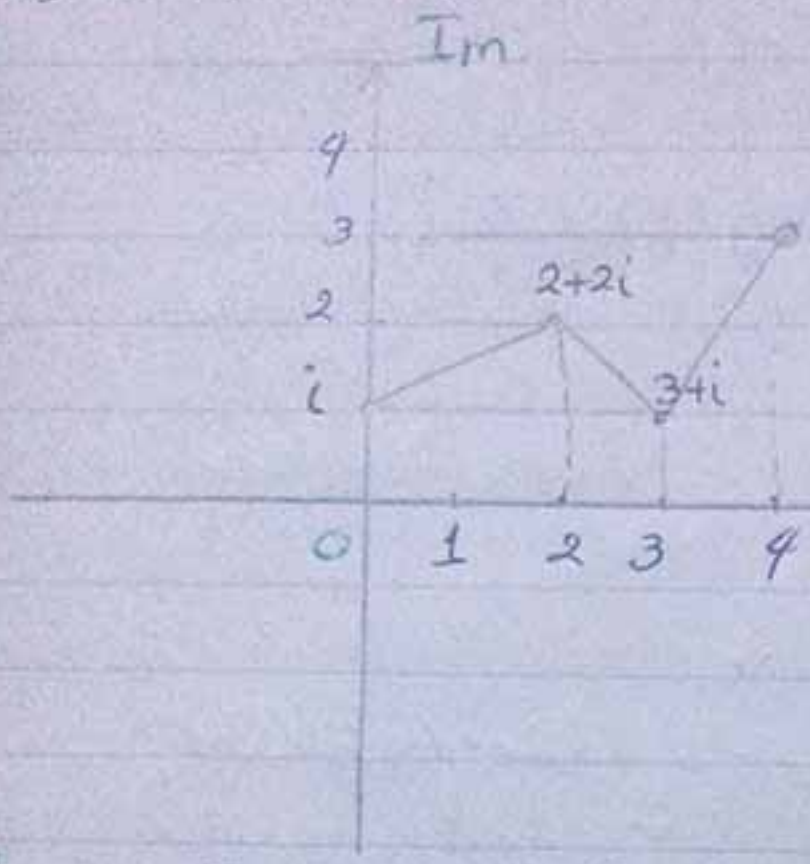
A_4 هي مجموعة غير مفتوحة لكنها مغلقة
محدبة - مترابطة لكنها ليست منطقة

$A_4^\circ = \phi$ ، $\overline{A_4} = A$

$Fr(A_4) = A_4$

سؤال:

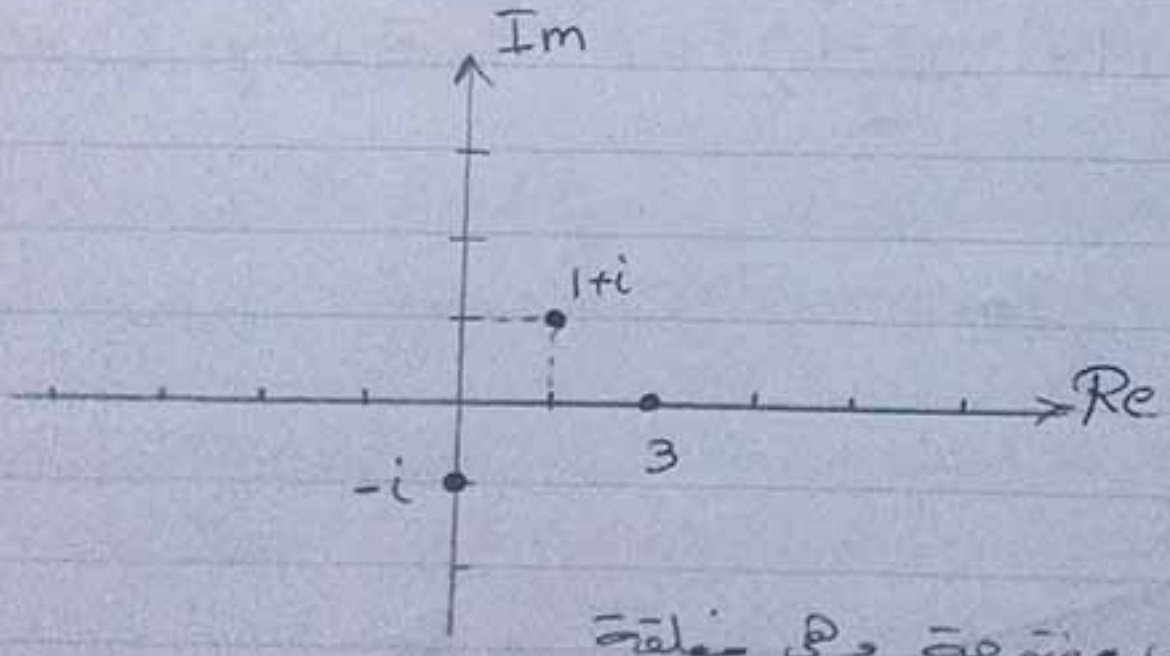
5] $A_5 = [i, 2+2i, 3+i, 4+3i[$



نلاحظ أنّ A_5 غير مفتوحة وغير مغلقة، محدودة وغير محدبة مترابطة وليست منطقة

كل مجموعة منطقية مغلقة وليست مفتوحة

6] $A_6 = \{-i, 1+i, 3\}$

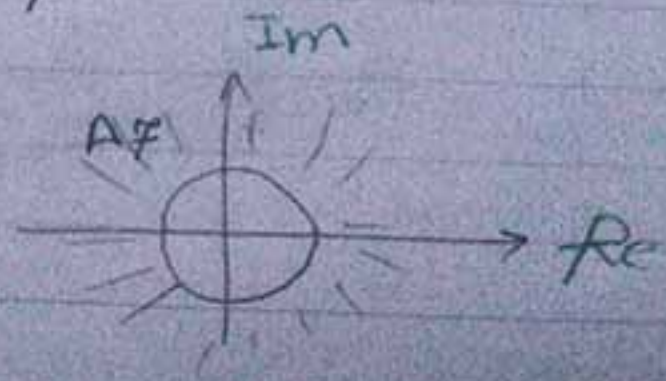


نلاحظ أنّ A_6 ليست مفتوحة وهي مغلقة وهي محدودة وهي غير محدبة وهي ليست مترابطة وهي ليست منطقة.

سؤال: أوجد $\mathring{A}_6$ ، $\bar{A}_6$ ، A'_6

$\mathring{A}_6 = \phi$ ، $\bar{A}_6 = A$ ، $A'_6 = \phi$

7] $A_7 = \{z \in \phi : |\frac{1}{z}| < 1\}$



لاحظ أن A_χ هي مجموعة مفتوحة وغير مغلقة وغير قريبة متراصة وهي منطقة وحيدة الترابط

سؤال: هل A_χ جوار لـ ∞؟؟

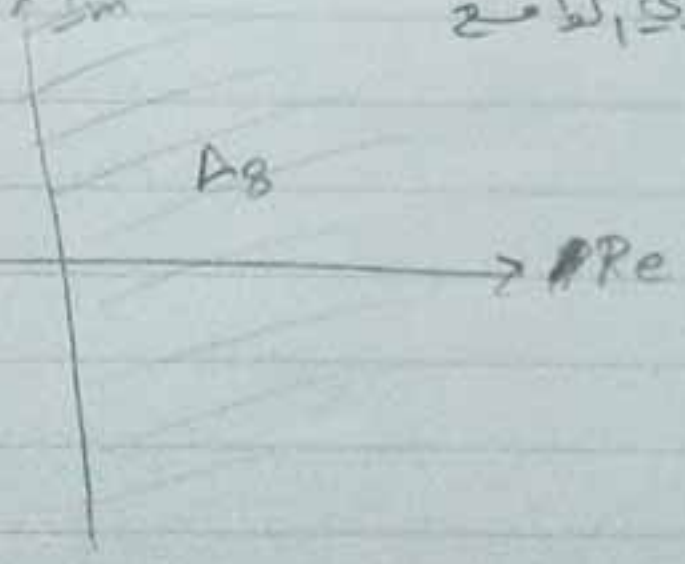
نعم

$$A_\delta = \{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1 \}$$

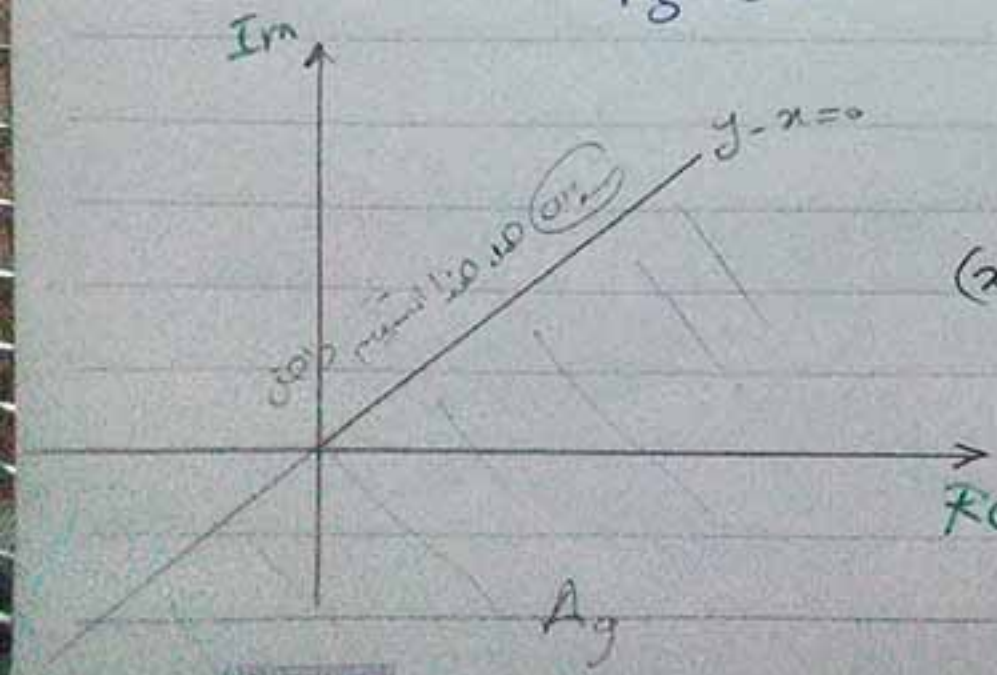
نفرض أن $z = x + iy$ ومنه:

$$|z-1| \leq |z+1|$$
$$(x-1)^2 + y^2 \leq (x+1)^2 + y^2$$
$$-2x \leq 2x \Rightarrow x \geq 0$$

ومنه A_δ تمثل نصف المستوي المغلق على يمين المحور التخيلي مع المحور التخيلي.



$$A_\gamma = \{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-1}{z-i} \right| < 1 \}$$



نفرض أن $z = x + iy$

$$|z-1| < |z-i|$$
$$(x-1)^2 + y^2 < x^2 + (y-1)^2$$
$$-2x < -2y$$
$$y - x < 0$$

وظيفة:

أعد التمرين السّابق من أجل:

1) $A_1 = D(3+2i) \cup [3+i, 3+2i]$

2) $A_2 = \{ z \in \mathbb{C} ; |z - \frac{1}{2}| \leq |1 - \frac{1}{2}\bar{z}| \}$

3) $A_3 = \{ z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 2 + Im(z) \leq 2 \}$

4) $A_4 = \{ z \in \mathbb{C} ; 4 \leq |z+i| + |z-i| \leq$ سدان $\}$

5) $A_5 = \{ z \in \mathbb{C} ; |z-1| + |z+1| = 4 \}$

6) $A_6 = \{ z \in \mathbb{C} ; \frac{1}{4} < Re\frac{1}{z} + Im(\frac{1}{z}) < \frac{1}{2} \}$

7) $A_7 = \mathbb{C}$