المحاضرة الخامسة عشرة.

ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F بعده n، قاعدته $S=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ فنوئذ:

$$\forall v \in V : v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_n v_n$$

يكتب كتركيب خطي بشكل وحيد بدلالة عناصر S.

ليكن W فضاء شعاعي معرف على حقل F وبعده m و $L:V \longrightarrow W$ تطبيق خطي وقاعدته $S'=\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$

$$L(v_i) \in W \ \forall i \in \{1,2,\dots,n\} \Rightarrow L(v_i)=$$

$$L(v_1)=\lambda_{11}w_1+\lambda_{21}w_2+\dots+\lambda_{m1}w_m$$

$$L(v_2)=\lambda_{12}w_1+\lambda_{22}w_2+\dots+\lambda_{m2}w_m$$

$$\vdots$$

$$L(v_n)=\lambda_{1n}w_1+\lambda_{2n}w_2+\dots+\lambda_{mn}w_m$$

حيث $\lambda_{ij} \in F$: $\forall i \in \{1,2,\dots,m\}, j \in \{1,2,\dots,n\}$

ومنه نكون:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(F).$$

تعريف: نسمي المصفوفة A بمصفوفة التطبيق الخطي L بالنسبة للقاعدتين المرتبتين S و S' ((مرتبة: أي نحافظ على ترتيب عناصر القاعدتين S و S'))

ملاحظة: ① ان مصفوفة التطبيق الخطي L متعلقة باختيار القاعدتين المرتبتين ((أي أنها وحيدة)).

② عدد الأعمدة يساوي بعد الفضاء V. ((المنطلق)) وعدد الأسطر يساوي بعد W ((المستقر)).

اذا كان $V=W$ أو $\dim V=\dim W$ نجد أن المصفوفة مربعة ((مصفوفة التطبيق الخطي)).

تعريف: نقول عن التطبيق الخطي $L:V \longrightarrow W$ انه مؤثر خطي اذا وفقط اذا كان $V=W$.

مثال: أوجد مصفوفة التطبيق الخطي $L:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$L(x,y)=(2x+3y,\ x-y,\ 3x-2y)$$

1) أوجد مصفوفة التطبيق الخطي بالنسبة للقاعدتين القانونيتين في $\mathbb{R}^2$، $\mathbb{R}^3$.

٢) أوجد مصفوفة التطبيق الخطي بالنسبة للقاعدتين المرتبتين

$A=\{v_1=(1,1),\ v_2=(2,-1)\}$

$B=\{w_1=(0,1,1),\ w_2=(1,0,1),\ w_3=(1,1,0)\}$

الحل: ١)

$E=\{e_1=(1,0),\ e_2=(0,1)\}\subseteq \mathbb{R}^2$

$E'=\{e'_1=(1,0,0),\ e'_2=(0,1,0),\ e'_3=(0,0,1)\}\subseteq \mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{array}{l} L(e_1)=L(1,0)=(2,1,3)=2e'_1+e'_2+3e'_3 \\ L(e_2)=L(0,1)=(3,-1,-2)=3e'_1-e'_2-2e'_3 \end{array}\right\} \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

٢) $L(v_1)=L(1,1)=(5,0,1)=\lambda_1 w_1+\lambda_2 w_2+\lambda_3 w_3$

$=\lambda_1(0,1,1)+\lambda_2(1,0,1)+\lambda_3(1,1,0)=(\lambda_2+\lambda_3,\ \lambda_1+\lambda_3,\ \lambda_1+\lambda_2)$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 5=\lambda_2+\lambda_3 \\ 0=\lambda_1+\lambda_3 \Rightarrow \lambda_1=-\lambda_3 \\ 1=\lambda_1+\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2=1-\lambda_1=1+\lambda_3 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow 5=1+\lambda_3+\lambda_3 \Rightarrow \boxed{\lambda_3=2},\ \boxed{\lambda_2=3},\ \boxed{\lambda_1=-2}$

$\Rightarrow \boxed{L(v_1)=-2w_1+3w_2+2w_3}$

$L(v_2)=L(2,-1)=(1,3,8)=\lambda_1 w_1+\lambda_2 w_2+\lambda_3 w_3=(\lambda_2+\lambda_3,\ \lambda_1+\lambda_3,\ \lambda_1+\lambda_2)$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1=\lambda_2+\lambda_3 \Rightarrow \lambda_2=1-\lambda_3 \\ 3=\lambda_1+\lambda_3 \Rightarrow \lambda_1=3-\lambda_3 \\ 8=\lambda_1+\lambda_2 \Rightarrow 8=3-\lambda_3+1-\lambda_3 \Rightarrow \boxed{\lambda_3=-2},\ \boxed{\lambda_2=4},\ \boxed{\lambda_1=5} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow L(v_2)=5w_1+3w_2-2w_3$

ونلاحظ أن مصفوفة L بالنسبة للقاعدتين المرتبتين M':

$$M'=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

مثال: ليكن $L:\mathbb{R}_2[x]\longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ مؤثر خطي

$\forall f(x)\in \mathbb{R}_2[x]:\ L(f)=3.f$

أوجد مصفوفة L بالنسبة للقاعدتين المرتبتين

$A=\{f_1=x+2,\ f_2=2x-1,\ f_3=2x^2\}$

$B=\{g_1=x^2+2x,\ g_2=x+1,\ g_3=1\}$

الحل:

$L(f_1)=3f_1=3x+6=\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\lambda_3 g_3=$

$\lambda_1(x^2+2x)+\lambda_2(x+1)+\lambda_3(1)=\lambda_1 x^2+(2\lambda_1+\lambda_2)x-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$

$\Rightarrow \lambda_1=0;\ 2\lambda_1+\lambda_2=3 \Rightarrow \boxed{\lambda_2=3},\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=6 \Rightarrow \boxed{\lambda_3=3}$

$\Rightarrow \boxed{L(f_1) = 0g_1 + 3g_2 + 3g_3}$

$L(f_2) = 3f_2 = 6x - 3 \Rightarrow \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 \Rightarrow$

$\lambda_1 x^2 + (2\lambda_1 + \lambda_2)x - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ و $2\lambda_1 + \lambda_2 = 6 \Rightarrow$

$\boxed{\lambda_2 = 6}$ ، $-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -3 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = -9}$

$\boxed{L(f_2) = 0g_1 + 6g_2 - 9g_3}$

$L(f_3) = 6x^2 = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 = \lambda_1 x^2 + (2\lambda_1 + \lambda_2)x - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 .$

$\Rightarrow \lambda_1 = 6$ ، $2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -12$ ، $-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_3 = 18} \Longrightarrow \boxed{L(f_3) = 6g_1 - 12g_2 + 18g_3}$

ومنه تكون ما مصفوفة التطبيق الخطي بالنسبة للقاعدتين المرتبتين A و B

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & -12 \\ 3 & -9 & 18 \end{pmatrix}$$

تمرين: أوجد مصفوفة المؤثر الخطي $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$L(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$

1): بالنسبة للقاعدة القانونية في $\mathbb{R}^2$

2): بالنسبة للقاعدة القانونية في $\mathbb{R}^3$ و

$A = \{v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,1,0)\}$

3): بالنسبة للقاعدة A والقاعدة المرتبة.

$B = \{b_1 = (1,1,-1), b_2 = (-1,0,1), b_3 = (-1,1,0)\}.$

انتهت هذه الحصة