الدراسة الحركية :

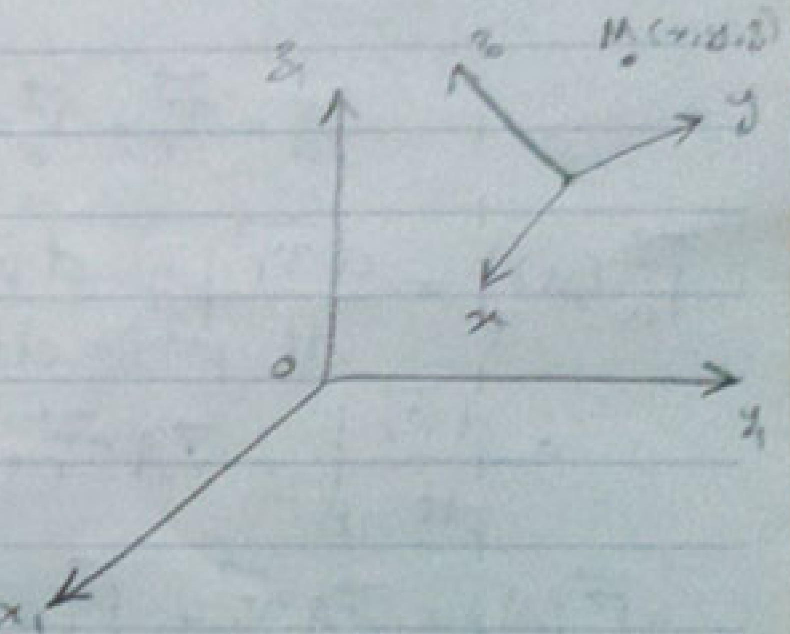
$\forall M \in S : \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM} = (x_0, y_0, z_0) + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

لنفرض أنّ :

$\vec{i}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\vec{j}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $\vec{k}(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$

$\rightarrow$

$$\overrightarrow{O_1M} = (x_0, y_0, z_0) + x\alpha_1\vec{i_1} + x\beta_1\vec{j_1} + x\gamma_1\vec{k_1} + y\alpha_2\vec{i_1} + y\beta_2\vec{j_1} + y\gamma_2\vec{k_1} + z\alpha_3\vec{i_1} + z\beta_3\vec{j_1} + z\gamma_3\vec{k_1}$$



$$\Rightarrow x_1 = x_0 + x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3$$
$$y_1 = y_0 + x\beta_1 + y\beta_2 + z\beta_3$$
$$z_1 = z_0 + x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\gamma_3$$

$$\vec{v}_a(M) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_F$$

$$= \underbrace{(x_0', y_0', z_0')} + \underbrace{x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}}_{\vec{v}_r(M)} + \underbrace{x\vec{i}' + y\vec{j}' + z\vec{k}'}$$

$$\vec{v}_e(M)$$

$$\vec{\Gamma}_a(M) = \left.\frac{d\vec{v}_a(M)}{dt}\right|_F = (x_0'', y_0'', z_0'') + \underbrace{x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}}_{\vec{\Gamma}_r(M)} +$$

$$\underbrace{2(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')} + x\vec{i}'' + y\vec{j}'' + z\vec{k}''$$

$\vec{\Gamma}_c(M)$ متمم.

وسائر بور :

$$\vec{\Gamma}_a(M) = \left.\frac{d\vec{v}_a(M)}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{v}_a(M)}{dt}\right|_M + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_a$$

$$=(\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

مماثلة

$$\Gamma_x = \dot{v}_x + q v_z - r v_y$$
$$\Gamma_y = \dot{v}_y + r v_x - p v_z$$
$$\Gamma_z = \dot{v}_z + p v_y - q v_x$$

شروط التدحرج دون انزلاق:

لأن حركة المركز الآني للدوران على المدحرج (بالنسبة للمستوي المتحرك) هي حركة نسبية وسرعة انتقاله على المدحرج هي سرعة نسبية نرمز لها بـ $\vec{v}_r(I)$

أما حركة نقطة ولتكن P في المستوي المتحرك والتي تنطبق على I في لحظة ما بالنسبة للمستوي الثابت هي حركة جرية والسرعة في هذه الحركة تكون معدومة أي $\vec{v}_e(I) = \vec{0}$

أما حركة I بالنسبة للجملة الثابتة هي حركة مطلقة وسرعتها تكون $\vec{v}_a(I)$

$$\vec{v}_e(I) = \vec{0} \;;\; \rightarrow \vec{v}_r(I) = \vec{v}_a(I)$$

أي سرعة انتقال I على القاعدة تساوي سرعة انتقاله على المدحرج وبالتالي المسافة التي تقطعها I على القاعدة تساوي المسافة التي تقطعها I على المدحرج.

خلاصة: إن العلاقات التالية متكافئة وتعد كل منها شرطاً لتدحرج منحني وليكن C على منحني آخر C_1 ثابت دون انزلاق:

I) نقطة التماس بين المنحني C والمنحني C_1 هي المركز الآني للدوران.

II) السرعة الجرية لنقطة التماس تساوي الصفر.

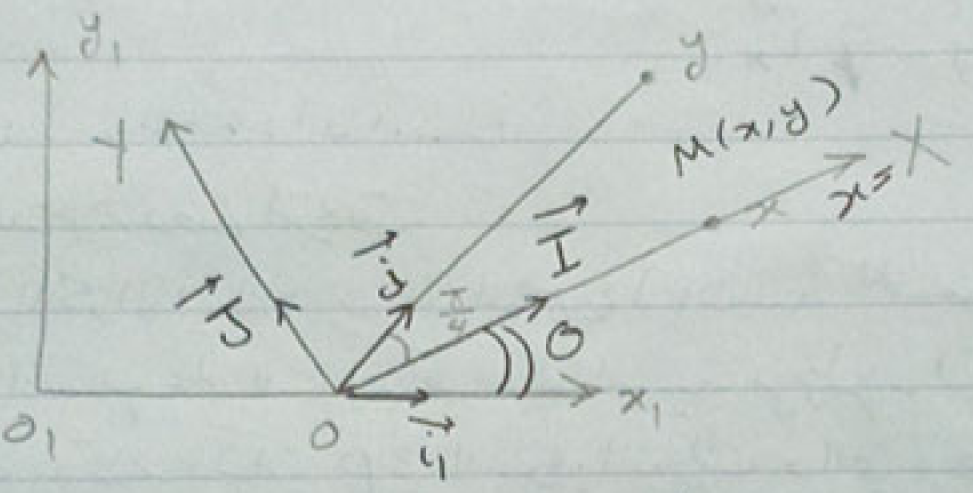
III) السرعة النسبية للمركز الآني للدوران تساوي السرعة المطلقة للمركز الآني للدوران

IV) المسافة التي تقطعها I على المدحرج تساوي المسافة التي تقطعها I على القاعدة.

مسألة : $x\hat{o}y$ زاوية صلبة قياسها $\frac{\pi}{4}$ تدور في مستويها حول رأسها الثابت O بسرعة زاوية $\omega = 2t$ ، ويتحرك رأسها O على المستقيم الثابت O_1x_1 بسرعة قيمتها العددية $v(0) = v$

M نقطة تتحرك بالنسبة للزاوية $x\hat{o}y$ إحداثياتها بالنسبة للزاوية (x,y) والمطلوب : 1 تعيين معادلات الحركة للنقطة M

2 شعاع السرعة المطلق والتسارع المطلق للنقطة M بدلالة الزمن وإحداثيات النقطة ومشتقاتها.



OXY

نضع OXY جملة متماسكة مع oxy

$O_1x_1y_1$ ثابتة

ونضع O قطب للحركة

$x_0 = \int v\,dt = vt + C$

بداية الحركة $t=0 ,\ x_0 = 0 \Rightarrow C = 0$

$\rightarrow \boxed{x_0 = vt}$ 1 $\boxed{y_0 = 0}$ 2

لأن O تتحرك على O_1x_1 فقط لا توجد حركة على الـ y

$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow d\theta = \omega\,dt$

$\rightarrow \theta = \int 2t\,dt$

$= t^2 + \theta_0$

بداية الحركة $t=0 ,\ \theta = 0 \rightarrow \theta_0 = 0$

$\rightarrow \boxed{\theta = t^2}$

$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM} = (x_0 , y_0) + x\vec{i} + y\vec{j}$

$\vec{i} = \cos\theta\,\vec{i_1} + \sin\theta\,\vec{j_1} = \cos t^2\,\vec{i_1} + \sin t^2\,\vec{j_1}$

$\vec{j} =$

لاحظ استعمالنا تعلق المماسة إلا في حال تركيب الحركات

$$\vec{j} = \cos(\theta + \frac{\pi}{4})\vec{i_1} + \sin(\theta + \frac{\pi}{4})\vec{j_1} = \cos(t^2 + \frac{\pi}{4})\vec{i_1} + \sin(t^2 + \frac{\pi}{4})\vec{j_1}$$

$$\vec{O_1M} = (vt + x\cos t^2 + y\cos(t^2 + \frac{\pi}{4})\vec{i_1} + (x\sin t^2 + y\sin(t^2 + \frac{\pi}{4}))\vec{j_1}$$

$$\vec{v_a}(M) = (v + \dot{x}\cos t^2 - x(2t)\sin t^2 + \dot{y}\cos(t^2 + \frac{\pi}{4}) - y(2t)$$
$$\sin(t^2 + \frac{\pi}{4}))\vec{i_1} + (\dot{x}\sin t^2 + x(2t)\cos t^2 + \dot{y}$$
$$\sin(t^2 + \frac{\pi}{4}) + y(2t)\cos(t^2 + \frac{\pi}{4}))\vec{j_1}$$

لا شتقاق نحصل على المصاح

طريقة ثانية :

$$\vec{v_a}(M) = \vec{v_r}(M) + \vec{v_e}(M)$$

$$M(x, y) \longrightarrow \vec{v_r}(M) = (\dot{x}, \dot{y})$$

الحركة مستوية

$$\vec{v_e}(M) = \vec{v}(o) + \vec{\omega} \wedge \vec{oM} = v\vec{i_1} + \vec{\omega} \wedge oM$$

على المماسة

$$\vec{i_1} = \cos\theta\,\vec{I} - \sin\theta\,\vec{J}$$
$$= \cos t^2\,\vec{I} - \sin t^2\,\vec{J}$$

$$\vec{i} = \vec{I}$$

لدينا

$$\vec{j} = \cos(\frac{\pi}{4})\vec{I} + \sin\frac{\pi}{4}\vec{J} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{I} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{J}$$

$$\Rightarrow \vec{oM} = x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{I} + y(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{I} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{J})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{oM} = (x + y\frac{\sqrt{2}}{2})\vec{I} + y\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{J}}$$

على المماسة

$$\rightarrow \vec{v_a}(M) = (\dot{x}, \dot{y}) + \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2t \\ x + y\frac{\sqrt{2}}{2} & y\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v_a}(M) = (\dot{x} - \sqrt{2}yt)\vec{I} + (\dot{y} + 2tx + \sqrt{2}ty)\vec{J}$$

$$\vec{\Gamma_a}(M) = \left.\frac{d\vec{v_a}(M)}{dt}\right|_M + \vec{\omega} \wedge \vec{v_a}(M)$$

$$\Gamma_a(M) = (x'' - \sqrt{2}y't - \sqrt{2}y)\vec{I} + (y'' + 2tx' + 2x + \sqrt{2}yt + \sqrt{2}y)\vec{J} + \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2t \\ V_{ax} & V_{ay} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (x'' - \sqrt{2}y't - \sqrt{2}y - 2ty' - 4t^2x - 2t^2\sqrt{2}y)\vec{I}$$
$$+ (y'' + 2tx' + 2x + \sqrt{2}y't + \sqrt{2}y + 2tx' - 2t^2\sqrt{2}y)\vec{J}$$