تمرين :

أوجد حل مشترك تقريبي للجملة $g(x)=y-\cos x=0$, $f(x,y)=2x-y+1=0$

انطلاقا من النقطة $(0.5,0.5)$ بدقة $\varepsilon=0.1$

الحل :

1) طريقة نيوتن :

نلاحظ أن

$$J(f,g)=\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ \sin x & 1 \end{vmatrix}=2+\sin x\neq 0$$

$\Leftarrow$ يوجد حل للجملة و ليكن $(\bar{x},\bar{y})$

$$(x_0,y_0)=(0.5,0.5)\Rightarrow J(x_0,y_0)=J(0.5\,,0.5)=2.4794\neq 0$$

$$x_1=x_0-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}=0.5-\frac{1}{2.4794}\begin{vmatrix} 1.5 & -1 \\ -0.3775 & 1 \end{vmatrix}=0.0472$$

$$y_1=y_0-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}=0.5-\frac{1}{2.4794}\begin{vmatrix} 2 & 1.5 \\ 0.4794 & -0.3775 \end{vmatrix}=1.0945$$

$$(x_1,y_1)=(0.0472\,,1.0945)\Rightarrow J(x_1,y_1)=2.0471\neq 0$$

$$x_2=x_1-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}_{(x_1,y_1)}=0.0472-\frac{1}{2.0471}\begin{vmatrix} -0.0001 & -1 \\ 0.0956 & 1 \end{vmatrix}=0.0005$$

$$y_2=y_1-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}_{(x_1,y_1)}=1.0945-\frac{1}{2.0471}\begin{vmatrix} 2 & -0.0001 \\ 0.0471 & 0.0956 \end{vmatrix}=1.001$$

$$(x_2, y_2) = (0.0005\ , 1.001) \Rightarrow$$

$$|x_2 - x_1| = 0.04 < \varepsilon \quad \& \quad |y_2 - y_1| = 0.09 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \approx (x_2, y_2) = (0.0005\ , 1.001)$$

2) طريقة التكرار :

نكتب المعادلتين بالشكل :

$$x = F(x,y) = \frac{y-1}{2} \quad \& \quad y = G(x,y) = \cos x$$

$$F_x = 0\ ,\ F_y = \frac{1}{2}\ ,\quad G_x = -\sin x\ ,\quad G_y = 0$$

$$|F_x| + |F_y|_{(x_0,y_0)} = \frac{1}{2} < 1$$

$$|G_x| + |G_y|_{(x_0,y_0)} = \sin(0.5) = 0.4794 < 1$$

نطبق القوانين التكرارية :

$$x_1 = F(x_0,y_0) = \frac{0.5-1}{2} = 0.25 \qquad y_1 = G(x_0,y_0) = \cos 0.5 = 0.8775$$

$$(x_1, y_1) = (0.25\ , 0.8775)$$

$$x_2 = F(x_1,y_1) = -0.0612 \qquad y_2 = G(x_1,y_1) = 0.9689$$

$$(x_2, y_2) = (-0.0612\ , 0.9689)$$

$$x_3 = F(x_2,y_2) = -0.0155 \qquad y_3 = G(x_2,y_2) = 0.9981$$

$$(x_3, y_3) = (-0.0155\ , 0.9981)$$

$$|x_3 - x_2| = 0.0457 < \varepsilon \quad , \quad |y_3 - y_2| = 0.0292 < \varepsilon$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) \approx (x_3, y_3) = (-0.0155\ , 0.9981)$$

3) نيوتن المبسطة :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n,y_n)}{f_{x(x_n,y_n)}} = x_n - \frac{2x_n - y_n + 1}{2} = \frac{y_n - 1}{2}$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{g(x_n,y_n)}{g_{y(x_n,y_n)}} = y_n - y_n - cos\, x_n = cos\, x_n$$

وبما أن هذه القوانين التكرارية هي نفسها تم استخدامها في قانون التكرار فأن الحل سيكون نفسه

تمرين :

احسب بشكل تقريبي قيمة التكامل :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+\cos x}$$

بطريقة ((المستطيلات ، أشباه المنحرفات ،سيمبسون))

من أجل $n = 4$

الحل :

نلاحظ أن $h = \frac{1-0}{4} = 0.25$

x	0	0.25	0.5	0.75	1
y	0.5	0.5078	0.5325	0.5774	0.6492

1) بطريقة المستطيلات :

$$I \approx h(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = (0.25)(0.5 + 0.5078 + 0.5325 + 0.5774) = 0.5294$$

2) بطريقة أشباه المنحرفات :

$$I \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4)$$

$$= \frac{(0.25)}{2}(0.5 + 2 \times 0.5078 + 2 \times 0.5325 + 2 \times 0.5774 + 0.6492) = 0.548$$

3) بطريقة سيمبسون

$$I \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$= \frac{(0.25)}{3}(0.5 + 4 \times 0.5078 + 2 \times 0.5325 + 4 \times 0.5774 + 0.6492) = 0.5462$$

تمرين :

باستخدام منشور تايلور أوجد حل تقريبي للمعادلة التفاضلية $y' = y + x^2$ حيث $h = 0.1$, $y(0) = 1$

على المجال $[0,0.2]$ مستخدما أربع حدود من منشور تايلور

الحل :

نلاحظ أن منشور تايلور من أربع حدود كما يلي :

$$y(x+h) = y(x) + h\,y'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x)$$

$$: y'(x) = y + x^2 \quad , \quad y''(x) = y' + 2x = y + x^2 + 2x$$

$$y'''(x) = y' + 2x + 2 = y + x^2 + 2x + 2$$

$$(x_0, y_0) = (0,1) \Rightarrow y'(0) = 1 \ , \ y''(0) = 1 \ , \ y'''(0) = 3$$

$$y_1 = y(x_1) = y(0.1) = y(0) + h\,y'(0) + \frac{h^2}{2}y''(0) + \frac{h^3}{6}y'''(0)$$

$$= 1 + (0.1)(1) + \frac{(0.1)^2}{2}(1) + \frac{(0.1)^3}{6}(3) = 1.1055$$

$$(x_1, y_1) = (0.1,1.1055) \Rightarrow y'(0.1) = 1.1155 \ , \ y''(0.1) = 1.3155 \ ,$$

$$y'''(0.1) = 3.3155$$

$$y_2 = y(x_2) = y(0.2) = y(0.1) + h\,y'(0.1) + \frac{h^2}{2}y''(0.1) + \frac{h^3}{6}y'''(0.1)$$

$$= 1.1055 + (0.1)(1.1155) + \frac{(0.1)^2}{2}(1.1155) + \frac{(0.1)^3}{6}(3.3155) = 1.2241$$

x	0	0.1	0.2
y	1	1.1055	1.2241

...انتهت المحاضرة (22) ...

انتهى المقرر

مع تمنياتي لكم بالنجاح

مع تحيات : أيهم عبد الرحمن