المعادلات التفاضلية التي تؤول إلى متجانسة :

مثال (1) : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$y' = \frac{3x - y + 5}{x + y - 1}$$

إيجاد نقطة التقاطع :

$$\begin{array}{r} 3x - y + 5 = 0 \\ x \ + y - 1 = 0 \\ \hline 4x + 4 = 0 \end{array} \; +$$

$$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2$$

نفرض التحويل التالي :

$$x = u - 1 \Rightarrow dx = du$$

$$y = v + 2 \Rightarrow dy = dv$$

$$\Rightarrow v' = \frac{3(u-1) - (v+2) + 5}{(u-1) + (v+2) - 1} \Rightarrow v' = \frac{3u - v}{u + v}$$

نفرض التحويل :

$$z = \frac{v}{u} \Rightarrow v = zu \Rightarrow v' = z + z'u$$

$$\Rightarrow z + z'u = \frac{3u - uz}{u + uz} \Rightarrow z + z'u = \frac{3 - z}{1 + z}$$

$$\Rightarrow z'u = \frac{3 - z - z - z^2}{1 + z} \Rightarrow \frac{dz}{du}u = -\frac{(z^2 + 2z - 3)}{1 + z}$$

$$\Rightarrow (-2)\frac{1 + z}{-(z^2 + 2z - 3)}dz = \frac{du}{u}(-2)$$

$$\Rightarrow \frac{2z + 2}{z^2 + 2z - 3}dz = -2\frac{du}{u}$$

$$\Rightarrow \ln|z^2+2z-3| = -2\ln|u| + \ln|c|$$

$$\Rightarrow z^2+2z-3 = \frac{c}{u^2}$$

$$\frac{v^2}{u^2} + 2\frac{v}{u} - 3 = \frac{c}{u^2}$$

$$\Rightarrow v^2 + 2vu - 3u^2 = c$$

$$\Rightarrow (y-2)^2 + 2(y-2)(x+1) - 3(x+1)^2 = c$$

$$y^2 - 4y + 4 + 2yx + 2y - 4x - 4 - 3x^2 - 6x - 3 = c$$

$$y^2 - 3x^2 - 2y - 10x + 2xy - 3 = c$$

مثال (2) : أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$y' = \frac{2x+y-2}{6x+3y+1}$$

الحل : (المستقيمان متوازيان)

نفرض :

$$z = 2x + y \Rightarrow dz = 2dx + dy \Rightarrow \frac{dz}{dx} - 2 = \frac{dy}{dx} = y'$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} - 2 = \frac{z-2}{3z+1} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z-2+6z+2}{3z+1} = \frac{7z}{3z+1} \Rightarrow \frac{3z+1}{7z}dz = dx$$

$$\left(\frac{3}{7} + \frac{1}{7}\frac{1}{z}\right)dz = dx$$

$$\frac{3}{7}z + \frac{1}{7}\ln|z| = x + c \Rightarrow \frac{3}{7}(2x+y) + \frac{1}{7}\ln(2x+y) = x + c$$

$$\frac{3}{7}y + \frac{1}{7}\ln|2x+y| = \frac{1}{7}x + c \Rightarrow 3y + \ln|2x+y| = x + 7c$$

مثال (3) : أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$y' = \sin^2(x-y)$$

نفرض :

$$z = x - y \Rightarrow y = x - z \Rightarrow dy = dx - dz \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{dz}{dx} = \sin^2(z) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - \sin^2(z) = \cos^2(z)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{\cos^2(z)} = dx \Rightarrow tg\,(z) = x + c \Rightarrow tg(x-y) = x + c$$

$$\Rightarrow x - y = arc\,tg(x+c) \Rightarrow y = x - arc\,tg(x+c)$$

مثال (4) : أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$y'(x+y)^2 = 1$$

نفرض:

$$z = x + y \Rightarrow y = z - x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dz}{dx} - 1\right) z^2 = 1 \Rightarrow \frac{dz}{dx} - 1 = \frac{1}{z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1+z^2}{z^2} \Rightarrow \frac{z^2}{1+z^2} dz = dx$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{1+z^2}\right) dz = dx$$

$$z - arc\,tg\,(z) = x + c \Rightarrow x + y - arc\,tg(x+y) = x + c$$

$$\Rightarrow y - arc\,tg\,(x+y) = c \Rightarrow y - c = arc\,tg\,(x+y)$$

$$tg(y-c) = x + y \Rightarrow x = tg(y-c) - y$$

مثال (5) : أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$y' - \frac{2x}{x^2+3}\,y = (x^2+3)\cos x$$

الحل :

$$y = u\,.\,v \Rightarrow y' = u'v + v'u$$

بالتعويض في المعادلة نجد :

$$u'v + v'u - \frac{2x}{x^2+3}(u\,.\,v) = (x^2+3)\cos x$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{x^2+3}\,v\right) = (x^2+3)\cos x$$

توجد قيمة وحيدة لـ v تحقق المعادلة :

$$v' - \frac{2x}{x^2+3}v = 0 \Rightarrow \frac{v'}{v} = \frac{2x}{x^2+3} \Rightarrow \ln|v| = \ln|x^2+3| \Rightarrow v = x^2+3$$

نعوض في المعادلة :

$$u'(x^2+3) + 0 = (x^2+3)\cos x \Rightarrow u' = \cos x \Rightarrow u = \sin x + c$$

$$\Rightarrow y = (\sin x + c)(x^2+3)$$

طريقة أخرى للحل :

نحل المعالة التالية دون طرف ثانٍ :

$$y' - \frac{2x}{x^2+3}\,y = 0 \Rightarrow y' = \frac{2x}{x^2+3}\,y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2x}{x^2+3}\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|x^2+3| + \ln|c| \Rightarrow y = c(x^2+3)$$

نجعل c تابعاً لـ x نجد : $y = c(x)(x^2+3)$

نشتق بالنسبة لـ x نجد :

$$y' = c'(x)(x^2+3) + 2x\,c(x)$$

نعوض في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ :

$$\Rightarrow c'(x)(x^2+3) + 2x\,c(x) - \frac{2x}{x^2+3}c(x)(x^2+3) = (x^2+3)\cos x$$

$$\Rightarrow c'(x)(x^2+3) = (x^2+3)\cos x$$

$$c'(x) = \cos x \Rightarrow c(x) = \sin x + c$$

$$\Rightarrow y = (\sin x + c)(x^2+3)$$

... انتهت المحاضرة (2) ...