المجال المفتوح في $\mathbb{R}$ هو منطقة في $\mathbb{C}$ هي مجموعة مفتوحة ومترابطة أي منطقة

المحاضرة السابعة عشر

استمرار تابع عقدي:

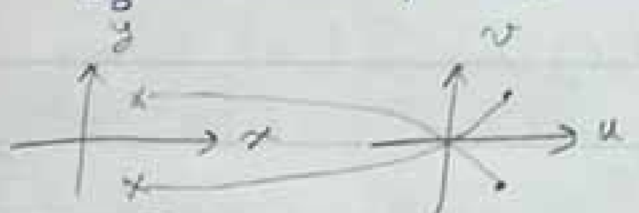
بفرض $w=f(z)$ تابع عقدي مُعرّف على المنطقة D وبفرض z_0 نقطة من D عندئذٍ نقول عن f أنه مستمر عند النقطة z_0 إذا تحقق الشرط التالي:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

ونقول عن f أنه مستمر على D إذا كان $f(z)$ مستمر عند كل نقطة من نقاط D

مبرهنة: بفرض $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تابع عقدي مُعرّف في جوار النقطة $z_0=x_0+iy_0$ عندئذٍ:

f مستمر عند z_0 $\Leftrightarrow$ $u(x,y), v(x,y)$ مستمران عند (x_0,y_0)

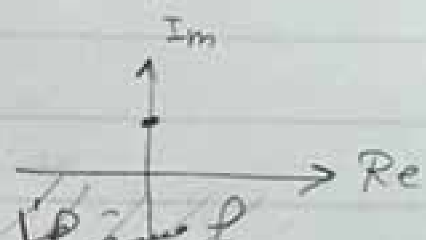


مثال: $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$

$$z\longmapsto f(z)=\bar{z}=x-iy$$

تابع مستمر أي أن الخط البياني له لا ينقطع

نلاحظ أنّ $u(x,y)=x, v(x,y)=-y$ وكلاهما مستمر على $\mathbb{C}$ فالتابع f مستمر على $\mathbb{C}$



مثال: بفرض $f(z)=\dfrac{z^2+z+1}{z-i}$

معرف ← مستمر ← قابل للاشتقاق

نلاحظ أنّ التابع $f(z)$ غير مُعرّف عندما $z=i$ وبالتالي غير مستمر عندما $z=i$ وبالتالي f غير مستمر على $\mathbb{C}$

مبرهنة: بفرض $f_1(z), f_2(z)$ تابعان عقديان مستمران عند النقطة z_0 وبفرض α ثابت عقدي عندئذٍ:

1) $(\alpha f_1+f_2)(z)$ مستمر عند النقطة z_0.

2) $(f_1\cdot f_2)(z)$ تابع مستمر عند النقطة z_0.

$f(x)=\frac{1}{x}$

استمرار تابع عقدي بانتظام:

بفرض $w = f(z)$ تابع عقدي معرّف على المنطقة D عندئذٍ نقول عن $f(z)$ أنه مستمر بانتظام على D إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) ; \forall z_1, z_2 \in D ; |z_1 - z_2| < \delta \rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

z^n دائماً مستمر

تمرين: أثبت أن التابع $f(z) = z^3$ مستمر بانتظام على أي مجموعة جزئية ومحدودة من المستوي العقدي.

الحل: بفرض A مجموعة جزئية من $\mathbb{C}$ ومحدودة عندئذٍ:

$$\exists R > 0 ; \forall z \in A \Rightarrow |z| < R$$

ومنه:

$$\forall z_1, z_2 \in A : |f(z_1) - f(z_2)| = |z_1^3 - z_2^3| = |z_1 - z_2|\,|z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2|$$

حسب متراجحة المثلث

$$\leq |z_1 - z_2| . [|z_1^2| + |z_1 z_2| + |z_2^2|]$$

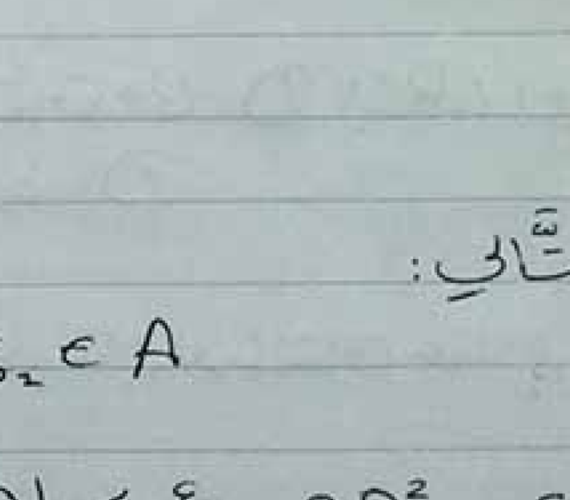
$$< |z_1 - z_2| . 3R^2$$

وبالتالي:

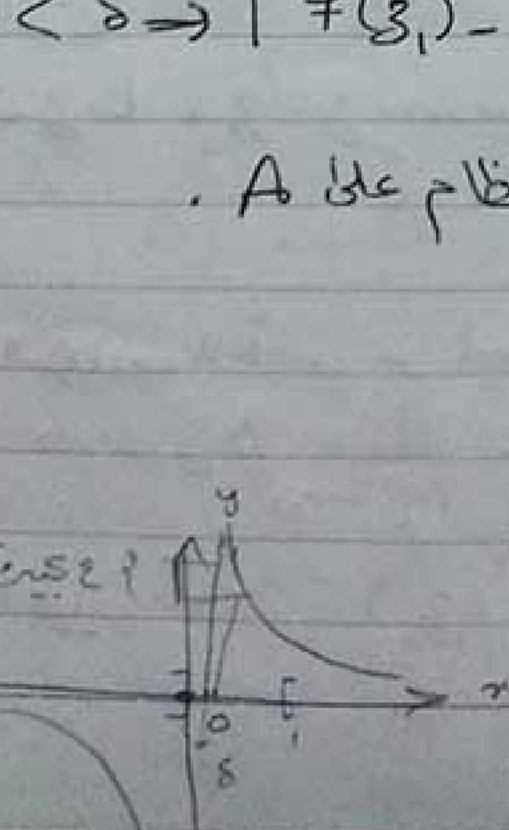
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3R^2} : \forall z_1, z_2 \in A$$

$$; |z_1 - z_2| < \delta \rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \frac{\varepsilon}{3R^2} 3R^2 = \varepsilon$$

ومنه $f(z)$ مستمر بانتظام على A.



$f(x) = \ln x$
غير مستمر



δ كبير مقارنة بـ ε ?

غير مستمر عند $x = 0$ وبالتالي فهو غير مستمر بانتظام

$y = f(x) = \frac{1}{x}$ غير مستمر بانتظام في جوار الصفر

ملاحظة: لا نقول أنه غير مستمر في نقطة لأن هذا التابع مستمر في مجالات

أثبت أن التابع $f(z)=\dfrac{1}{z}$ غير مستمر بانتظام في جوار الصفر

الحل:

$$|f(z_1)-f(z_2)| = \left|\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1-z_2}{z_1 \cdot z_2}\right|$$

$$= \frac{|z_1-z_2|}{|z_1 \cdot z_2|} \xrightarrow[z_1, z_2 \to 0]{} \infty$$

✫ اشتقاق تابع عقدي:

بفرض $w=f(z)$ تابع عقدي معرّف على $D \subset \mathbb{C}$ ونفرض $z_0 \in D$ عندئذٍ نقول عن $f(z)$ أنه قابل للاشتقاق عند النقطة z_0 إذا وُجدت النهاية:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

ونقول عن $f(z)$ أنه قابل للاشتقاق على D إذا كان $f(z)$ قابل للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط D

كل تابع قابل للاشتقاق يكون مستمر ومعرف

مبرهنة: بفرض $f(z)$ تابع عقدي قابل للاشتقاق عند z_0 عندئذٍ $f(z)$ مستمر عند z_0.

تابع قابل للاشتقاق عند نقطة له مماس عند هذه النقطة وبالتالي فهو مستمر

الإثبات:

بفرض $z=z_0+\Delta z$ عندئذٍ:

$$f(z)-f(z_0) = \frac{f(z)-f(z_0)}{\Delta z} \cdot \Delta z$$

$y=\sqrt{x}$

مستمر وغير قابل للاشتقاق

نأخذ نهاية الطرفين من أجل $\Delta z \to 0$ فيكون:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left(f(z)-f(z_0)\right) = f'(z) \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z = 0$$

أي

$$\lim_{\Delta z\to 0} f(z) = f(z_0)$$

$f(z)=\dfrac{1}{z}$

غير معرف، غير مستمر وغير قابل للاشتقاق عندما $z=0$

الرموز المطابقة تعمل على تقريب الاشتقاقات :

تابع الاشتقاق للتابع العقدي

مثال : نفرض $f(z) = Re(z)$ تابع عقدي ونفرض $z = x + iy$ عندئذٍ

$f(z) = x$ هو تابع مستمر ولكن :

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$= \begin{cases} \xrightarrow{\quad} 0 & \text{على مسار المحور التخيلي} \ \ll \Delta x = 0 \gg \\ \xrightarrow{\quad} 1 & \text{على مسار المحور الحقيقي} \ \ll \Delta y = 0 \gg \end{cases}$$

وهو غير قابل للاشتقاق.

مبرهنة نفرض $f_1(z)$, $f_2(z)$ تابعان عقديان قابلان للاشتقاق على $D \subset \mathbb{C}$ ونفرض α ثابت عقدي عندئذٍ :

1) $(\alpha f_1(z) + f_2(z))' = \alpha f_1'(z) + f_2'(z)$

2) $(f_1(z) . f_2(z))' = f_1'(z) . f_2(z) + f_1(z) . f_2'(z)$

3) $\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)' = \frac{f_1'(z) . f_2(z) - f_2'(z) . f_1(z)}{f_2^2(z)}$ ، $f_2(z) \neq 0$ أي تابع صفري

ملاحظة : نفرض $f(z) = c$ تابع عقدي ثابت عندئذٍ :

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{c - c}{\Delta z} = 0$$

صفر فعلي

صفر غير فعلي يسعى نحو الصفر

وحسب أو مثال الاشتقاقات التي تحصلنا $= \frac{0}{1}$ (Δz)

وهو التفسير أنه مشتق الثابت هو صفر

ونفرض $f(z) = z$ تابع عقدي مطابق عندئذٍ :

$$f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} 1 = 1$$

$(\alpha+\beta)^3 = \binom{3}{0}\alpha^3 + \binom{3}{1} 3\alpha^2\beta + \binom{3}{2} 3\alpha\beta^2 + \binom{3}{3}\beta^3$

$(\alpha+\beta)^4 = \binom{4}{0}\alpha^4 + \binom{4}{1}\alpha^3\beta =$

مثال

مبرهن $f(z) = z^n$ حيث $n \in \mathbb{N}$ عندئذ :

$$\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\Big(z^n + \binom{n}{1} z^{n-1}\Delta z + \binom{n}{2} z^{n-2}\Delta z^2 + \cdots\cdots + \Delta z^n - z^n \Big]$$

$$= n z^{n-1} + \Delta z\Big[\binom{n}{2} z^{n-2} + \cdots\cdots + \Delta z^{n-2}\Big]$$

$$\xrightarrow[\Delta z \to 0]{} n z^{n-1}$$

وظيفة

1 أوجد نهاية : $\lim\limits_{z \to 1+i} \dfrac{2z+1}{z^2+z+1}$

2 أثبت أن النهاية $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z}{|z|}$ غير موجودة .

المسار $x = y$ ، $x = -y$

$x = 0$ ، $y = 0$

3 أثبت أن $f(z) = \bar{z}$ مستمر وغير قابل للاشتقاق .