محاضرة الثالثة

المعادلات التفاضلية التامة، عوامل التكميل

1) $(3x^2+6xy^2)\,dx+(6x^2y+4y^3)\,dy=0$

$M(x,y)=(3x^2+6xy^2) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=12xy$

$N(x,y)=(6x^2y+4y^3) \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=12xy$

$F(x,y)=\int M(x,y)\,dx+\ell(y)$

$F(x,y)=\int(3x^2+6xy^2)\,dx+\ell(y)$

$F(x,y)=x^3+3x^2y^2+\ell(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\cancel{6x^2y}+\ell'(y)=\cancel{6x^2y}+4y^3$

$\ell'(y)=4y^3 \Rightarrow \ell(y)=y^4$

$F(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4=C$

2) $(x+y+1)\,dx+(x-y^2+3)\,dy=0$

$M(x,y)=M(x+y+1) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=1$

$N(x,y)=N(x-y^2+3) \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=1$

$F(x,y)=\int M(x,y)\,dx+\ell(y)$

$F(x,y)=\int(x+y+1)\,dx+\ell(y)$

$F(x,y)=\frac{x^2}{2}+yx+x+\ell(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\cancel{x}+\ell'(y)=\cancel{x}-y^2+3$

$\ell'(y)=-y^2+3 \Rightarrow \ell(y)=-\frac{y^3}{3}+3y$

$F(x,y)=\frac{x^2}{2}+yx-\frac{y^3}{3}+3y+x=C$

عوامل التكميل

$$\psi(x)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

$$\psi(y)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

$$\psi(x.y)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\cdot y-Mx}$$

$$\psi(x+y)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N-M}$$

تمارين

1) $(2y+3xy^3)\,dx+(x+3x^2y^2)\,dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=2+9xy^2$

$\frac{\partial N}{\partial x}=1+6xy^2$

ومنه المعادلة ليست تامة

$$\psi(x)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

$$\psi(x)=\frac{2+9xy^2-1-6xy^2}{x+3x^2y^2}=\frac{1+3xy^2}{x(1+3xy^2)}$$

$\Rightarrow \psi(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow \int\psi(x)\,dx=\ln(x)$

$\Rightarrow \mu=e^{\int\psi(x)dx}=e^{\ln(x)}=x$

نضرب طرفي المعادلة السابقة ب x فنحصل على معادلة تامة: لها الشكل

$(2xy+3x^2y^3)\,dx+(x^2+3x^3y^2)\,dy=0$

$F(x,y)=\int(x^2+3x^3y^2)\,dy+\ell(x)$

$F(x,y)=x^2y+x^3y^3+\ell(x)$

نشتق بالنسبة لـ x نجد

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 3x^2y^3 = 2xy + 3x^2y^3 + c'(x)$

$\Rightarrow c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = C$

$\Rightarrow f(x,y) = x^2y + x^3y^3 = C$

3) $(y + 3x^3)dx + (x + \frac{x^4}{y})dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 1 + \frac{4x^3}{y}$

ومنه المعادلة التفاضلية ليست تامة

$\psi(x,y) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \cdot y - Mx}$

$\psi(x,y) = \frac{1 - 1 - \frac{4x^3}{y}}{x \cdot y + x^4 - x \cdot y - 3x^4}$

$\psi(x,y) = \frac{2}{x \cdot y}$

$\Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{2}{x \cdot y}$

ولكن لدينا $\mu' = \frac{\partial M}{\partial(x \cdot y)}$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{M} = \frac{2}{x \cdot y}(\partial(x \cdot y))$

$\ln|M| = \frac{2}{x \cdot y}(x\,dy + y\,dx)$

$= \frac{2}{y}dy + \frac{2}{x}dx$

$\Rightarrow \ln|M| = 2\ln|y| + 2\ln|x|$

$\Rightarrow \ln|M| = \ln|y^2| + \ln|x^2| = \ln|y^2 \cdot x^2|$

$M = x^2 \cdot y^2$

نضرب طرفي المعادلة بـ x^2y^2

تصبح المعادلة التفاضلية تامة ولها الشكل

$(x^2y^3 + 3x^5y^2)dx + (x^3y^2 + x^6y)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2y^2 + 6x^5y$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2y^2 + 6x^5y$

ومنه المعادلة التفاضلية تامة ولها حل من الشكل:

$F(x,y) = \int N\,dy + c(x)$

$= \int (x^3y^2 + x^6y)\,dy + c(x)$

$F(x,y) = \frac{x^3y^3}{3} + \frac{x^6y^2}{2} + c(x)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2y^3 + 3x^5y^2 = x^2y^3 + 3x^5y^2 + c'(x)$

$\Rightarrow c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = C$

$\Rightarrow f(x,y) = \frac{x^3y^3}{3} + \frac{x^6y^2}{2} = C$

3) $(\frac{y}{x^2} + x)dx + (-\frac{1}{x})dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$

$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$

ومنه المعادلة التفاضلية تامة ولها حل من الشكل

$F(x,y) = \int N\,dy + c(x)$

$= \int -\frac{1}{x}\,dy + c(x)$

$$F(x,y)=\int -\frac{1}{x}\,dy + \ell(x)$$

$$F(x,y)=\frac{-y}{x}+\ell(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{x^2}+\acute{\ell}(x)$$

$$\Rightarrow x+\frac{y}{x^2}=\frac{y}{x^2}+\acute{\ell}(x)$$

$$\Rightarrow \acute{\ell}(x)=x \Rightarrow \ell(x)=\frac{x^2}{2}+C$$

$$\Rightarrow F(x,y)=\frac{-y}{x}+\frac{x^2}{2}=C$$

مثال (2)

$$(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})\,dx+(x^2+y^2)\,dy=0$$

الحل

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x+x^2+y^2 \quad , \quad \frac{\partial N'}{\partial x}=2x$$

ومنه المعادلة التفاضلية غير تامة

$$\psi(x)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2x+x^2+y^2-2x}{x^2+y^2}=1$$

$$\Rightarrow \int \psi(x)\,dx=\int dx=x$$

$$\Rightarrow \mu=e^{x}$$

$$\Rightarrow e^{x}(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})\,dx+e^{x}(x^2+y^2)\,dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=e^{x}(2x+x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=e^{x}(2x+x^2+y^2)$$

ومنه المعادلة التفاضلية السابقة تامة

$$F(x,y)=\int N\,dy+\ell(x)$$

$$=\int (x^2e^{x}+e^{x}y^2)\,dy+\ell(x)$$

$$F(x,y)=x^2e^{x}y+e^{x}\frac{y^3}{3}+\ell(x)$$

$$F(x,y)=-\frac{y}{x}+\ell(x)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{y}{x^2}+\acute{\ell}(x)=\frac{y}{x^2}+x$$

$$\Rightarrow \acute{\ell}(x)=x \Rightarrow \ell(x)=\frac{x^2}{2}+C$$

$$\Rightarrow F(x,y)=-\frac{y}{x}+\frac{x^2}{2}=C_1$$

محاضرة (4) تفاضلية عملي

أوجد عامل التكامل لكل من المعادلات التالية

ثم أوجد حلها العام

$$(x^3+y)\,dx-x\,dy=0$$

الحل

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-1$$

ومنه المعادلة التفاضلية غير تامة

$$\psi(x)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2}{-x}=-\frac{2}{x}$$

$$\int \psi(x)\,dx=\int -\frac{2}{x}\,dx=\ln\left|\frac{1}{x^2}\right|$$

$$\mu=e^{\ln\left|\frac{1}{x^2}\right|}=\frac{1}{x^2}$$

ومنه

$$(x+\frac{y}{x^2})\,dx-\frac{1}{x}\,dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{1}{x^2} \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{x^2}$$

ومنه المعادلة التفاضلية تامة

SUBJECT: ____________ / /

$F(x,y) = x^2 e^{x} y + e^{x} \frac{y^3}{3} + \ell(x)$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^{x} y + x^2 e^{x} y + \frac{y^3}{3} e^{x} + \ell'(x)$

$\Rightarrow e^{x}(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3}) = e^{x}(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3}) + \ell'(x)$

$\Rightarrow \ell'(x) = 0 \quad \Rightarrow \ell(x) = C$

$F(x,y) = x^2 e^{x} y + e^{x} \frac{y^3}{3} = C$

مثال (3)

$y\,dx + (y^2 \cos y - x)\,dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$

ومنه المعادلة التفاضلية غير تامة نوجد عامل التكميل

$\psi(y) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{2}{-y} = -\frac{2}{y}$

$\Rightarrow \int \psi(y)\,dy = \int -\frac{2}{y}\,dy = \ln\left|\frac{1}{y^2}\right|$

$\Rightarrow M = e^{\ln\left|\frac{1}{y^2}\right|} = \frac{1}{y^2}$

ومنه تكون لدينا المعادلة التالية

$\frac{1}{y}\,dx + (\cos y - \frac{x}{y^2})\,dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$

ومنه المعادلة التفاضلية تامة وحلها هو

$F(x,y) = \int \frac{1}{y}\,dx + \ell(y)$

$F(x,y) = \frac{x}{y} + \ell(y)$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \ell'(y) = \cos y - \frac{x}{y^2}$

$\Rightarrow \ell'(y) = \cos y \Rightarrow \ell(y) = \sin y + C$

$\Rightarrow F(x,y) = \frac{x}{y} + \sin y = C$

محاضرة (5) تفاضلية عملي

معادلات تفاضلية خطية من المرتبة الثانية

مثال (1)

أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية

$y'' + y' - 2y = 3 - 2x$

الحل.

$y'' + y' - 2y = 0$

نفرض مجموعة حلول خاصة من الشكل

$y = e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda+2)(\lambda-1) = 0$

$\Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow y = e^{-2x}$

$\lambda = 1 \Rightarrow y = e^{x}$

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$

نوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية المعطاة

وبما أن $\alpha = 0$ ليست جذر للمعادلة المميزة

عندئذٍ يكون الحل الخاص من الشكل

$y_2 = Ax + B \quad , \quad y_2' = A \quad , \quad y_2'' = 0$

$A - 2(Ax + B) = 3 - 2x$

$A - 2Ax - 2B = 3 - 2x$

$\Rightarrow -2A = -2 \Rightarrow A = 1$

$A - 2B = 3 \Rightarrow B = -1$

$y_2 = x - 1$

$\Rightarrow y = y_1 + y_2 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + x - 1$

مثال (2)

$\ddot{y} - 2\dot{y} + 10y = e^{x}$

الحل

نحل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

$\ddot{y} - 2\dot{y} + 10y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$

$\Rightarrow \Delta = -36 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6i$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{2+6i}{2} = 1+3i \Rightarrow y = e^{(1+3i)x}$

$\lambda_2 = \frac{2-6i}{2} = 1-3i \Rightarrow y = e^{(1-3i)x}$

$y = e^{x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

نوجد الحل الخاص للمعادلة المعطاة

وبما أن $\alpha = 1$ ليست جذر للمعادلة المميزة

عندئذٍ يكون الحل الخاص من الشكل

$y_2 = Ae^{x}$

$\dot{y}_2 = Ae^{x}$ ، $\ddot{y}_2 = Ae^{x}$

نعوض في المعادلة نجد

$9Ae^{x} = e^{x} \Rightarrow A = \frac{1}{9}$

$y_2 = \frac{1}{9}e^{x}$

$\Rightarrow y = y_1 + y_2$

$\Rightarrow y = e^{x}(C_1 \cos 3x + C_2 \cos 3x + \frac{1}{9})$

مثال (3)

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 2e^{2x} + \frac{1}{2}x$

الحل

نحل المعادلة التفاضلية المتجانسة

$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0$

وذلك بفرض مجموعة الحلول الخاصة من الشكل

$y = e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 2$ مكرر $\Rightarrow y = e^{2x}$

$y = xe^{2x}$

$\Rightarrow y_1 = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$ الحل العام للمتجانسة

الآن نحل المعادلة وذلك بإيجاد حل خاص

وبما أنّ $\alpha = 2$ جذر للمعادلة المميزة

و $\alpha_1 = 0$ ليست جذر للمعادلة المميزة

عندئذٍ يكون للمعادلة حل خاص من الشكل

$y_2 = Ax^2e^{2x} + Bx + C$

$\dot{y}_2 = Ae^{2x}(2x + 2x^2) + B$

$\ddot{y}_2 = Ae^{2x}(4x + 4x^2 + 2 + 4x)$

$\ddot{y}_2 = Ae^{2x}(4x^2 + 8x + 2)$

نعوض في المعادلة المعطاة نجد

$Ae^{2x}(4x^2 + 8x + 2 - 8x - 8x^2 + 4x^2) - 4B + 4Bx$

$+4C = 2e^{2x} + \frac{1}{2}x$

$\Rightarrow 2Ae^{2x} + 4Bx + 4C - 4B = 2e^{2x} + \frac{1}{2}x$

$\Rightarrow 2A = 2 \Rightarrow A = 1$

$4B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{1}{8}$

$4C - 4B = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{8}$

$y_2 = x^2e^{2x} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}$

$y = y_1 + y_2$

$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x + x^2) + \frac{1}{8}(x + 1)$

محاضرة سادسة

مثال (1)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية

$\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0$

الحل

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$

$\lambda_1 = 2 \Rightarrow y = e^{x}$

$\lambda_2 = 1 \Rightarrow y = e^{2x}$

الحل العام $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

مثال (2)

أوجد الحل العام للمعادلة

$\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 2x - 3$

الحل

إن الحل العام للمعادلة الخطية المتجانسة

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

$y_2 = Ax + B$

$\dot{y}_2 = A \quad , \ddot{y}_2 = 0$

$\Rightarrow -3A + 2(Ax + B) = 2x - 3$

$-3A + 2Ax + 2B = 2x - 3$

$2Ax - 3A + 2B = 2x - 3$

$2A = 2 \Rightarrow A = 1$

$-3A + 2B = -3$

$2B = 0 \Rightarrow B = 0$

$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + x$

مثال (3)

$\dddot{y} - \dot{y} = 0$

الحل

$\lambda^3 - \lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$

$\lambda = 0 \ , \ \lambda = 1 \ , \ \lambda = -1$

الحل العام هو

$y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}$

مثال (4)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$\dddot{y} - 3\ddot{y} + 7\dot{y} - 5y = 0$

الحل

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$

$\lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 1 + 2i \ , \ \lambda_3 = 1 - 2i$

$\Rightarrow y = c_1 e^{x} + c_2 e^{x} \cos 2x + c_3 e^{x} \sin 2x$

مثال (5)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$\ddot{y} + 9y = 0$

الحل

$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3i$

$\lambda_2 = -3i$

$y = c_1 \cos 3x + c_2 \cos 3x$

مثال (6)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$\overset{4}{y} + 4y = 0$

SUBJECT: ______ / /

الحل:

$\lambda^4 + 4 = 0$

$(\lambda^2)^2 - (4i^2) = 0$

$(\lambda^2)^2 - (2i)^2 = 0$

$(\lambda^2 + 2i)(\lambda^2 - 2i) = 0$

$(\lambda + w_1)(\lambda - w_1)(\lambda + w_2)(\lambda - w_2) = 0$

حيث أن $w_1 = \sqrt{2i}$

$w_1 = x + iy \Rightarrow x + iy = \sqrt{2i}$

$\Rightarrow (x+iy)^2 = 2i$

$x^2 - y^2 + 2xiy = 2i$

$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2 \quad (1)$

$2xyi = 2i \Rightarrow x = \frac{1}{y} \quad (2)$

بحل (1) و (2) حلاً مشتركاً نجد أن

$\left.\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -1 \Rightarrow y = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} w_1 = 1 + i \\ w_1 = -1 - i \end{array}$

بأسلوب مشابه نجد أن

$w_2 = \sqrt{-2i}$

$w_2 = x + iy$

$w_2 = 1 - i \quad , w_2 = -1 + i$

$(\lambda + 1 + i)(\lambda + 1 - i)(\lambda - 1 + i)(\lambda - 1 - i) = 0$

$\lambda = -1 - i \ , \lambda = -1 + i \ , \lambda = 1 - i \ , \lambda = 1 + i$

الحلول الخاصة هي

$y_1 = e^{x} \cos x$

$y_2 = e^{x} \sin x$

$y_3 = e^{-x} \cos x$

$y_4 = e^{-x} \sin x$

$y = e^{x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{-x}(c_3 \cos x + c_4 \sin x)$