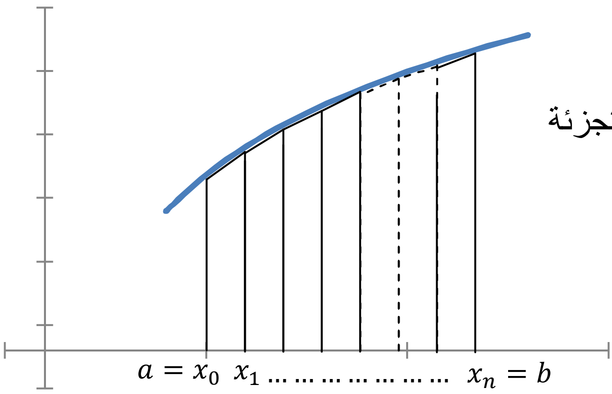
كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق
المقرر : تحليل عددي (1)
المحاضرة : (18)



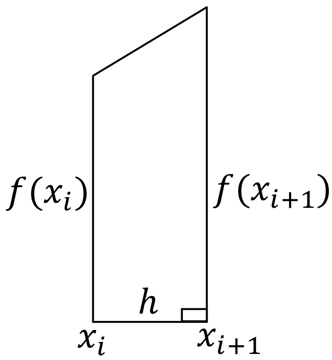
ثانياً : أشباه المنحرفات :

بفرض $f(x)$ تابع مستمر على المجال $[a,b]$ عندئذٍ نقوم بتجزئة المجال $[a,b]$ إلى n مجال متساوي الطول حيث طول كل مجال يساوي h حيث $h = \frac{b-a}{n}$

لنضع $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$

فيكون $[a,b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{n-1}, x_n]$

عندئذٍ تكون المساحة المطلوبة تساوي تقريباً مجموع مساحات كل من أشباه المنحرفات الموضحة بالشكل ومساحة كل شبه منحرف هي



$$\frac{h}{2}\left(f(x_{i+1}) + f(x_i)\right) \;:\; i = 0,1,\ldots,n-1$$

وبالتالي المساحة الكلية بطريقة أشباه المنحرفات تعطى بالقانون :

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)}$$

نلاحظ أنه كلما كانت n كبيرة كلما كانت القيمة أقرب للتكامل المطلوب .

مثال :

باستخدام طريقة أشباه المنحرفات أوجد قيمة تقريبية للتكامل

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

حيث $n = 5$

الحل :

نوجد قيمة $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$f(x)$	1	0.8333	0.7142	0.625	0.5555	0.5

$$I \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + f(x_5)\right)$$

$$= \frac{0.2}{2}(1 + 2 \times 0.8333 + 2 \times 0.7142 + 2 \times 0.625 + 2 \times 0.5555 + 0.5) = 0.6956$$

كما نلاحظ أن قيمة التكامل الفعلية هي : $I = ln\, 2 = 0.6931$

مثال2 :

باستخدام طريقة أشباه المنحرفات أوجد قيمة تقريبية للتكامل

$$I = \int_1^2 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

من أجل $n = 4$

الحل :

نوجد قيمة $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{4} = 0.25$

x	1	1.25	1.5	1.75	2
$f(x)$	0.731	0.7772	0.8175	0.8518	0.8807

$$I \approx h\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\right)$$

$$= \frac{0.25}{2}(0.731 + 1.5544 + 1.6351 + 1.7038 + 0.8807) = 0.8136$$

كما أن القيمة الفعلية للتكامل هي : $I = [ln\,(1 + e^x)]_1^2 = 0.8136$

مثال3 :

باستخدام طريقة أشباه المنحرفات أوجد قيمة تقريبية للتكامل

$$I = \int_{0.5}^{1} \frac{ln\,x}{x} dx$$

من أجل $n = 5$

الحل :

نوجد قيمة $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0.5}{5} = 0.1$

x	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x)$	-1.3862	-0.8513	-0.5095	-0.2789	-0.117	0

$$I \approx h\big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + f(x_5)\big) =$$

$$= \frac{0.1}{2}(-1.3862 - 1.7026 - 1.019 - 0.5578 - 0.234 + 0) = -0.24498$$

وظيفة :

اعد التمرين السابق من أجل

$$I = \int_{0}^{0.5} \frac{\sin x}{x} dx$$

من أجل $n = 5$

...انتهت المحاضرة (18) ...