الفصل (6) المحاضرة (13)　　　　2013 / 12 / 8

$= \operatorname{span} S_2 : S_2=\{v_1=(1,0,1,-2),\ v_2=(0,1,3,1)\}$

ومنه المجموعة $S=\{(v_1,0),(v_2,0),(0,u_1),(0,u_2)\}$

تشكل قاعدة للفضاء $W_1 \times W_2$ ومنه $\dim W_1 \times W_2 = 4$

$(u_1,0)=((1,0,1,0),(0,0,0,0))$

$(v_2,0)=((0,1,1,0),(0,0,0,0))$

$(0,u_1)=((0,0,0,0),(1,0,1,-2))$

$(0,u_2)=((0,0,0,0),(0,1,3,1))$

ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل K بعده n و S مجموعة جزئية من V $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ اذا كانت S مولدة بالفضاء V.
$V=\operatorname{span} S$ فهل S تشكل قاعدة للفضاء V؟

حسب ملاحظة: يوجد $T \subseteq S$ بحيث T قاعدة للفضاء V وبما أن بعد الفضاء يساوي عدد عناصر القاعدة فيكون عدد عناصر T يساوي n ومنه $T=S$ ومنه S قاعدة لـ V.

---

١٨ / ١٢ / ٢٠١٣　　الفصل (٦) التطبيقات الخطية　　المحاضرة (١٣).

٦-١- التطبيقات الخطية　٦-١-١: تعريف:

ليكن V و W فضاءات شعاعية معرفة على حقل K نقول عن التطبيق $L: V \longrightarrow W$ انه تطبيق خطي $\forall u,v \in V, \forall \lambda \in K$

1): $L(u+v)=L(u)+L(v)$

2): $L(\lambda v)=\lambda . L(v)$

مثال: ليكن التطبيق $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$: $L(x,y)=(x+y,y)$

$\forall u=(x_1,y_1), v=(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
L(u+v) &= L(x_1+x_2, y_1+y_2) \\
&= L((x_1+x_2)+(y_1+y_2), y_1+y_2) \\
&= ((x_1+y_1)+(x_2+y_2), y_1+y_2) \\
&= (x_1+y_1, y_1)+(x_2+y_2, y_2) \\
&= L(u)+L(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(\lambda v) &= (\lambda x_1, \lambda y_1) \\
&= (\lambda x_1+\lambda y_1, \lambda y_1) \\
&= \lambda (x_1+y_1, y_1) \\
&= \lambda L(v).
\end{aligned}$$

ملاحظة :

[1] : $W \longrightarrow V : L$ تطبيق خطي إذا تحقق

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F}, \forall v, u \in V, L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v)$

[2] : ان التطبيق الصفري هو $O : V \longrightarrow W$

تطبيق خطي $\forall v \in V, O(v) = 0$

[3] : التطبيق المطابق $id : V \longrightarrow V$

تطبيق خطي $\forall v \in V : id(v) = v$

الإثبات : $\forall u, v \in V : id(u+v) = u+v$

$= id(u) + id(v)$

$\forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall u \in V : id(\lambda u) = \lambda u = \lambda id(u)$

[4] : $L(0) = 0$

[5] : $\forall u \in V : L(-u) = -L(u)$

1-6-2: تعريف: ليكن $W \longrightarrow V : L$ تطبيق خطي , N, M فضاءات شعاعية جزئية في V و W على الترتيب :

(i) نعرف صورة M بأنها الفضاء الشعاعي الجزئي من W والتي تعطى بالشكل: $L(M) = \{L(m) \in W : m \in M\}$

(ii) نعرف الصورة العكسية للفضاء الجزئي N بأنها الفضاء الشعاعي الجزئي في V والتي تعطى بالشكل:

$L^{-1}(N) = \{v \in V : L(v) \in N\}$

(iii) نعرف نواة L بأنها الصورة العكسية للفضاء الصفري الجزئي من W أي $L^{-1}(0) = \{v \in V : L(v) = 0\}$

ونرمز لها $ker(L)$

(iiii) نعرف الصورة المباشرة للفضاء V بأنها صورة كل الفضاء V أي $L(V) = \{L(v) \in W : v \in V\}$ ونرمز لها بالرمز $Im(L)$

(1) ملاحظة : ليكن $W \longrightarrow V : L$ تطبيق خطي إن L غامر $Im(L) = V \Leftrightarrow$

(2) : ليكن $W \longrightarrow V : L$ تطبيق خطي إن L متباين $Ker(L) = \{0\} \Leftrightarrow$

الإثبات : (2) :

/ /

⇐ نفرض L متباين $\forall v \in Ker(L) : L(v) = 0$

ولكن من جهة ثانية $L(0) = 0$ ومنه $L(0) = L(v)$ ويجب أن L

متباين ⇐ $v = 0$ ومنه $ker(L) = \{0\}$

⇐ نفرض $ker(L) = \{0\}$ ، ونثبت أن L متباين

$v, u \in V : L(v) = L(u) \Rightarrow 0 = L(v) - L(u)$

$0 = L(v - u) \Rightarrow v - u \in Ker(L) = \{0\} \Rightarrow v - u = 0 \Rightarrow v = u$

ومنه L متباين.

مثال: أثبت أن التطبيق الخطي $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : L(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$

متباين ؟

$\forall (x, y, z) \in Ker(L) : L(x, y, z) = (0, 0, 0)$

ومن جهة ثانية $L(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 0 &= x + y \\ 0 &= y + z \\ 0 &= z + x \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y = z = 0$$

ومنه $ker(L) = \{(0, 0, 0)\}$

وبالتالي فإن L متباين

التماثل: تعريف التماثل:

نقول عن التطبيق $L : V \to W$ انه تماثل إذا وفقط إذا تحقق

(1): تطبيق خطي (2): متباين

(3): غامر.

ونرمز لذلك $V \cong W$ (V يماثل W).

١-٦-٢- مبرهنة: اذا كان V فضاء شعاعي معرف على حقل F وبعده n فإن

V يماثل F^n أي $V \cong F^n$.

الإثبات: لتكن $\{v_1, \ldots, v_n\}$ قاعدة للفضاء V

$\forall v \in V : \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$ و $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ بشكل وحيد

نوجد العلاقة $L : V \to F^n$:

$\forall v \in V : L(v) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

$L\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

/ /

1) لما تطبيق لأن كل عنصر من الفضاء V يكتب بشكل وحيد بدلالة عناصر B أي تكون احداثياته بالنسبة لـ B وكذلك كل عنصر $x \in V$ له صورة وحيدة وفق L.

2) لما خطي: $\forall u, x \in V : u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i ; x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$

حيث $\lambda_i, \mu_i \in F$ وتكتب بشكل وحيد

$$L(u+x) = L\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right)$$
$$= L\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) x_i\right)$$
$$= (\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \dots, \lambda_n + \mu_n)$$
$$= (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) + (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$$
$$= L(u) + L(x)$$

$\forall \lambda \in F ; \forall x \in V : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i ; \lambda_i \in F$

$$L(\lambda x) = L\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)$$
$$= L\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i) x_i\right) = (\lambda\lambda_1, \lambda\lambda_2, \lambda\lambda_3, \dots, \lambda\lambda_n)$$
$$= \lambda(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$
$$= \lambda L(x)$$

3) لما متباين: $\forall x, u \in V , L(u) = L(x)$

$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i , u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i : \lambda_i , \mu_i \in F$

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right) = L\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \Rightarrow$$

$$0 = L\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = L\left(\sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda_i) x_i\right)$$
$$(0, 0, \dots, 0) = (\mu_1 - \lambda_1, \mu_2 - \lambda_2, \dots, \mu_n - \lambda_n)$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \mu_1 , \lambda_2 = \mu_2 , \dots , \lambda_n = \mu_n$$

ومنه $u = x$

4) لما غامر: $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in F^n$

$$\Rightarrow \lambda_1 x_1 , \lambda_2 x_2 , \dots , \lambda_n x_n \in V$$
$$\Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \in V$$

$$\Rightarrow \exists x \in V , x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i ; L(x) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

وبالتالي متماثل، أي $V \cong F^n$

ملاحظة:

(1) ان كل الفضاءات الشعاعية المنتهية على حقل F وذات البعد n تكون متماثلة

(2) اذا كان $L: V \to W$ تطبيق خطي فإن

$$\dim(V) = \dim(\ker(L)) + \dim(\mathrm{Im}(L))$$

مثال: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$L(x,y,z) = (x+y,\ y+z,\ z+x)$$

أوجد قاعدة وبعد كل من $\ker(L)$ ، $\mathrm{Im}(L)$

الحل: من المثال السابق $\ker(L) = \{(0,0,0)\}$

ومنه قاعدة $\ker(L)$ هي المجموعة الخالية و $\dim(\ker(L)) = 0$

وبالتالي $\dim(\mathrm{Im}(L)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

$$\mathrm{Im}(L) = \{L(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \{(x+y,\ y+z,\ z+x) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x(1,0,1) + y(1,1,0) + z(0,1,1) : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \mathrm{Span}(S)$$

حيث $S = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$

ومنه S تولد $\mathrm{Im}(L)$

بما أن S تولد $\mathrm{Im}(L)$ فإنها تحوي قاعدة له وبما أن بعد $\mathrm{Im}(L) = 3$

تكون S قاعدة له وهو المطلوب