مراجعة و تمارين :

تمرين :

باستخدام الطريقة المباشرة أوجد جذر للمعادلة $f(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 2.384 = 0$

ثم أوجد جذر تقريبي في المجال $[-1\,,0]$

بالطرق : ((تنصيف المجال-القواطع - المماسات – النقطة الثابتة)) بدقة $\varepsilon = 0.035$

الحل :

نجري التحويل $x = z - \frac{a}{3} = z - 1$

$$\Rightarrow (z-1)^3 + 3(z-1)^2 + 7(z-1) + 2.384 = 0 \Rightarrow z^3 + 4z - 2.616 = 0$$

$$p = 4\,, q = -2.616$$

$$z_0 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2.616}{2} + \sqrt{\frac{(2.616)^2}{4} + \frac{(4)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{2.616}{2} - \sqrt{\frac{(2.616)^2}{4} + \frac{(4)^3}{27}}}$$

$$= 1.493 - 0.893 = 0.6 \Rightarrow \mathrm{x}_0 = \mathrm{z}_0 - 1 = 0.6 - 1 = 0.4$$

نعوض لنتحقق فنجد أن $f(0) = 0$ و هي محققة

<u>1) طريقة تنصيف المجال :</u>

نلاحظ أن : $f(-1) = -2.616 < 0 \quad , \quad f(0) = 2.384 > 0$

وبالتالي يوجد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[-1,0]$ وليكن α

$$x_1 = \frac{-1+0}{2} = -0.5 \quad \Rightarrow f(x_1) = -0.491 < 0 \quad \Rightarrow \alpha \in [-0.5\,,0]$$

$$x_2 = -0.25 \quad \Rightarrow f(x_2) = 0.8058 > 0 \quad \Rightarrow \alpha \in [-0.5\,,-0.25]$$

$$x_3 = -0.375 \quad \Rightarrow f(x_3) = 0.1281 > 0 \quad \Rightarrow \alpha \in [-0.5\,,-0.375]$$

$$x_4 = -0.4375 \quad \Rightarrow f(x_4) = -0.0188 < 0 \quad \Rightarrow \alpha \in [-0.4375\,,-0.375]$$

$$x_5 = -0.4062 \quad \Rightarrow f(x_5) = -0.0316 < 0 \quad \Rightarrow \alpha \in [-0.4062\,,-0.375]$$

نلاحظ أن $|x_4 - x_3| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad \alpha \approx x_5 = -0.4062$

<u>2) طريقة القواطع :</u>

نلاحظ أن : $f(-1) = -2.616 < 0 \quad , \quad f(0) = 2.384 > 0$

وبالتالي يوجد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[-1,0]$ وليكن α نطبق قانون القواطع

$$x_1 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} = -0.4768 \Rightarrow f(x_1) = -0.3799 < 0 \Rightarrow \alpha \in [-0.4768\,,0]$$

$$x_2 = -0.4112 \Rightarrow f(x_2) = -0.5667 < 0 \Rightarrow \alpha \in [-0.4112\,,0]$$

$$x_3 = -0.4016 \Rightarrow f(x_3) = -0.0081 < 0 \Rightarrow \alpha \in [-0.4016\,,0]$$

$$|x_3 - x_2| < \varepsilon \quad \Rightarrow \alpha \approx x_3 = -0.4016$$

<u>3) طريقة المماسات :</u>

نلاحظ أن : $f(-1) = -2.616 < 0 \quad , \quad f(0) = 2.384 > 0$

وبالتالي يوجد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[-1,0]$ وليكن α كذلك $f(x)$ تابع حدودي قابل للاشتقاق حيث $f'(x) = 3x^2 + 6x + 7$

نطبق قانون المماسات انطلاقاً من $b = 0$ فنجد :

$$f(b) = 2.384 \Rightarrow x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 0 - \frac{2.384}{7} = -0.3405 \Rightarrow f(x_1) = 0.3088$$

$$\Rightarrow x_2 = -0.3987 \Rightarrow f(x_2) = 0.0066$$

$$\Rightarrow x_3 = -0.3999 \Rightarrow f(x_3) = 0.0005$$

نلاحظ أن $|x_3 - x_2| < \varepsilon$ ومنه $\alpha \approx x_3 = -0.3999$

<u>4) طريقة النقطة الثابتة :</u>

نلاحظ أن : $f(-1) = -2.616 < 0 \quad , \quad f(0) = 2.384 > 0$

وبالتالي يوجد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[-1,0]$ وليكن α

نضع $f(x) = -\left(\frac{x^3+3x^2+2.384}{7}\right) = 0 \quad \Leftarrow \quad f'(x) = \frac{-3x^2-6x}{7}$

نجد أن $0 \le \left|\frac{-3x^2-6x}{7}\right| = |f'(x)|$ أي f تقليصي على المجال $[-1\,,0]$

كذلك $f([-1,0]) = [-0.6262\,,-0.3405] \subset [-1,0]$

ولنضع $U_0 = -0.5 \in [-1,0]$ فنجد

$$U_1 = -\left(\frac{(U_0)^3+3(U_0)^2+2.384}{7}\right) = -0.4298$$

$$U_2 = -0.4083$$

$$|U_2 - U_1| < \varepsilon \Rightarrow \alpha \approx U_2 = -0.4083$$

تمرين :

أوجد حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y = f(x) = \frac{x^2+2}{x+1}$ المعرف عند النقاط $(1,2,3)$ بالطرق ((العامة وطريقة لاغرانج و نيوتن الأمامية))

الحل :

x	1	2	3
$f(x)$	1.5	2	2.75

1) الطريقة المباشرة :

نلاحظ أن حدودية الاستيفاء من الدرجة الثانية ولتكن :

$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ ومنه :

$$a_2(1)^2 + a_1(1) + a_0 = 1.5 \Rightarrow a_2 + a_1 + a_0 = 1.5$$

$$a_2(2)^2 + a_1(2) + a_0 = 2 \Rightarrow 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 2$$

$$a_2(3)^2 + a_1(3) + a_0 = 2.75 \Rightarrow 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 2.75$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 5 + 1 = 2 \neq 0$$

أي للجملة حل وحيد

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1.5 \\ 4 & 2 & 2 \\ 9 & 3 & 2.75 \end{vmatrix} = 9 - 7 + 0.5 = 2.5 \Rightarrow a_0 = 1.25$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1.5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 2.75 & 1 \end{vmatrix} = 0.25 \Rightarrow a_1 = 0.125$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1.5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2.75 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.25 \Rightarrow a_2 = 0.125$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 0.125x^2 + 0.125x + 1.25$$

2)طريقة لاغرانج :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 6)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(-1)} = -(x^2 - 4x + 3)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(1)(2)} = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2)$$

$$\Rightarrow P_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$$

$$= (1.5)\left(\frac{1}{2}(x^2 - 5x + 6)\right) + (2)\left(-(x^2 - 4x + 3)\right) + (2.75)\left(\frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2)\right)$$

$$P_2(x) = 0.125x^2 + 0.125x + 1.25$$

...انتهت المحاضرة (21) ...