المحاضرة الثالثة عشر

الحركة المستوية للجسم الصلب

تعريف :

هي حركة جسم بحيث تبقى كل نقطة فيه أثناء الحركة في مستوى يوازي مستوي ثابت في الفراغ [يدعى المستوي الثابت بالمستوي الأساسي للحركة نرمز له ب π_1]

أي أن جميع مسارات النقط هي عبارة عن مستويات توازي المستوي الأساسي للحركة

النظرية الأساسية للحركة :

إذا تحرك جسم صلب بحركة مستوية فإن أي مستقيم يعامد المستوي الأساسي ومتماسك مع الجسم سوف يتحرك بحركة انسحابية

الإثبات :

ليكن S جسم صلب و Δ مستقيم يعامد π_1

$A, B \in \Delta \rightarrow A, B \in S \rightarrow |AB| = c$

$A \in S \xrightarrow[\text{مستوية } S]{\text{بما أن حركة}} \pi_1 \parallel \pi'$ تبقى في مستوي A

$B \in S \xrightarrow[\text{مستوية } S]{\text{بما أن حركة}} \pi_1 \parallel \pi''$ تبقى في مستوي B

$\rightarrow \pi_1 \parallel \pi' \parallel \pi''$

$\Delta \perp \pi_1 \rightarrow \vec{AB} \perp \pi_1 \rightarrow$ ثابت $\vec{AB}$ منه

$\rightarrow \vec{AB} = \vec{C} \rightarrow \dfrac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{0}$

$\rightarrow \vec{v}(B) - \vec{v}(A) = 0 \rightarrow \vec{v}(A) = v(B)$

$\rightarrow \vec{\Gamma}(A)$

نتيجة

لو أخذنا أي مستقيم يعامد المستوي الأساسي π_1 فإن لنقاطه كلها نفس السرعة ونفس التسارع فبمعرفة سرعة أي نقطة من المستوي π_1 نستطيع معرفة

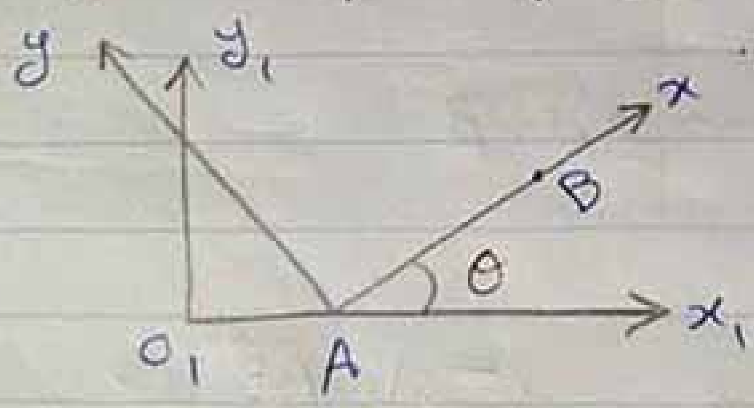
سرعة جميع النقاط الواقعة على المستقيم المقام من هذه النقطة والمعامد لـ π_1 فلدراسة حركة جسم صلب يتحرك بحركة مستوية يكفي دراسة حركة مستوي واحد يقع في المستوي الأساسي للحركة وبعبارة أخرى تقود الحركة المستوية إلى دراسة حركة نقاط في مستوي يقع داخل المستوي الأساسي للحركة.

عدد درجات حرية الجسم الصلب في الحركة المستوية:

يحتاج الجسم الصلب لثلاث نقاط غير واقعة على استقامة واحدة ولكل نقطة وسيطين إذاً عدد الوسطاء يساوي إلى ستة. لكن هذه الوسطاء مرتبطة بثلاث علاقات [هي علاقات البعد بين أي نقطتين].

إذاً يوجد ثلاث وسطاء مستقلة وبالتالي يوجد ثلاث معادلات للحركة. نحتاج للقطب يتعين بوسيطين وزوايا أولر وهي زاوية واحدة θ لأن الحركة تتم في المستوي. وشعاع الدوران هنا محمول على Δ العامودي على المستوي الأساسي π_1.

حيث θ - زاوية الدوران - هي الزاوية التي يصنعها مستقيم متماسك في المتحرك مع مستقيم ثابت في المستوي الثابت.



هنا القطب A

المهم أن تكون عندنا معلومات عن سرعة A

له عمودية على مستوي الحركة

$\vec{\omega}(0, 0, \omega)$

تعيين شعاع الموضع والسرعة والتسارع:

حيث O هي قطب الحركة (O متماسكة، O_1 ثابتة)

$\forall M \in S : \vec{O_1M} = \vec{O_1O} + \vec{OM}$

$O(x_0, y_0)$ الوسطاء هي

و زاوية الدوران.

$\vec{v}(M) = \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$

إذاً $|\vec{\omega} \wedge \vec{OM}| = |\vec{\omega}| . |\vec{OM}| \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{OM}}) = |\vec{\omega}| . |\vec{OM}|$

المركز الآني للدوران:

تعريف: هو نقطة من المستوي المتحرك تنعدم سرعتها في لحظة معينة بالنسبة للمستوي الثابت ونرمز له ب (I)

لو افترضنا أن I مطب الحركة

$$\forall M \in S \rightarrow \vec{v}(M) = \vec{v}(I) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM}$$

$$= \vec{0} + (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM})$$

مستوي

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IM}$$

(حركة دورانية حول I).

مبرهنة: المركز الآني إن وُجد فهو وحيد.

الإثبات:

بفرض I_1 مركز آني للدوران $\rightarrow \forall M \in S : \vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{I_1M}$

بفرض I_2 مركز آني للدوران $\rightarrow \forall M \in S : \vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{I_2M}$

$$\rightarrow \quad \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{I_1M} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{I_2M}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega} \wedge (\overrightarrow{I_1M} - \overrightarrow{I_2M}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{I_1I_2} = \vec{0} \qquad \vec{\omega} \neq \vec{0}, \ \vec{\omega} \perp \overrightarrow{I_1I_2}$$

$\rightarrow \quad \overrightarrow{I_1I_2} = 0 \rightarrow I_2$ منطبق على I_1

نوصل عودة

ملاحظة: إذا كانت A, B نقطتين من المستوي المتحرك فإن سرعة كل منها بدلالة المركز الآني للدوران هي:

$$\vec{v}(A) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IA} \rightarrow |\vec{v}(A)| = |\vec{\omega}| \cdot |\overrightarrow{IA}|$$

$$\vec{v}(B) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IB} \rightarrow |\vec{v}(B)| = |\vec{\omega}| \cdot |\overrightarrow{IB}|$$

$$|\vec{\omega}| = \frac{|\vec{v}(A)|}{|\overrightarrow{IA}|} = \frac{|\vec{v}(B)|}{|\overrightarrow{IB}|} = \omega$$

سؤال نظري

تعيين المركز الآني للدوران هندسياً :

ليكن $A,B \in$ المستوي المتحرك

الحالة الأولى ① $\vec{v}(A) \not\parallel \vec{v}(B)$

$\vec{v}(A) \perp d_1$

$\vec{v}(B) \perp d_2$

$A_1 \in d_1 \ , \ B_1 \in d_2$

$\text{proj } \vec{v}(A) = \text{proj } \vec{v}(A_1) = 0 \to \vec{v}(A_1) = \begin{cases} \vec{0} \\ \perp d_1 \end{cases}$

$AA_1 \in d_1 \qquad AA_2 \in d_2$

وبنفس الطريقة نجد أنّ :

$\vec{v}(B_1) = \begin{cases} \vec{0} \\ \perp d_2 \end{cases}$

ولكن $\vec{v}(A) \not\parallel \vec{v}(B) \to d_1 \not\parallel d_2 \to$

(d_1 و d_2 متقاطعين في نقطة ما ولتكن I)

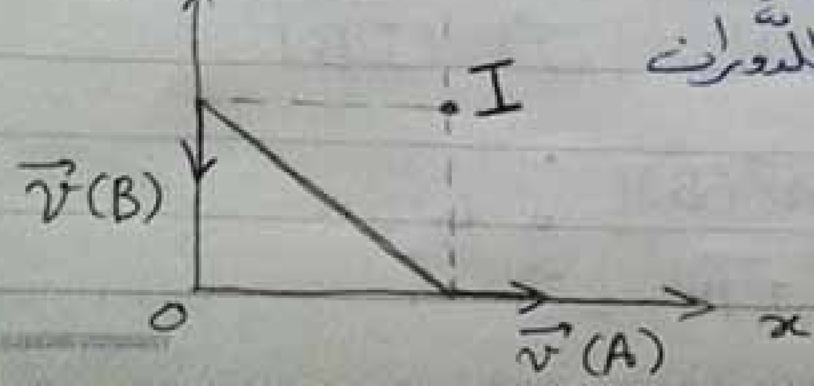
$I \in d_1 \to \vec{v}(I) = \begin{cases} \vec{0} \\ \perp d_1 \end{cases}$

$I \in d_2 \to \vec{v}(I) = \begin{cases} \vec{0} \\ \perp d_2 \end{cases}$

$\vec{v}(I) = \begin{cases} \vec{0} \\ I \ d_1 \wedge d_2 \end{cases} \to \vec{v}(I) = \vec{0}$

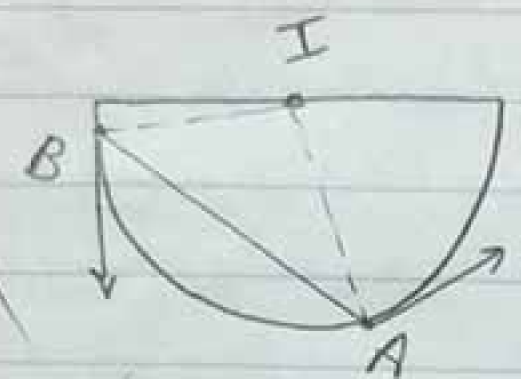
مثال: قضيب AB طرفه A ينطبق على المحور ox وطرفه B ينطبق على المحور oy .

والمطلوب: عيّن المركز الآني للدوران



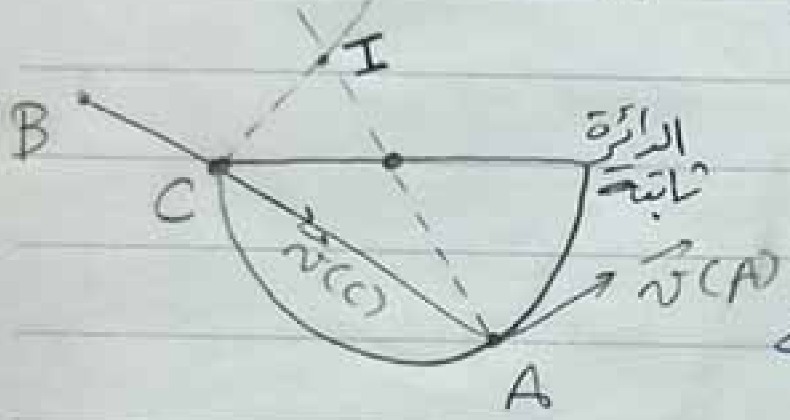
أما إذا كانت سرعة A لا توازي سرعة B $\vec{v}(A) \not\parallel \vec{v}(B)$

فنقيم من A عمود على سرعة A ونقيم من B عمود على سرعة B ونقطة تلاقي هذين العمودين هي المركز الآني للدوران.



قضيب ينزلق على دائرة AB

المركز الآني للدوران هو نفسه مركز الدائرة



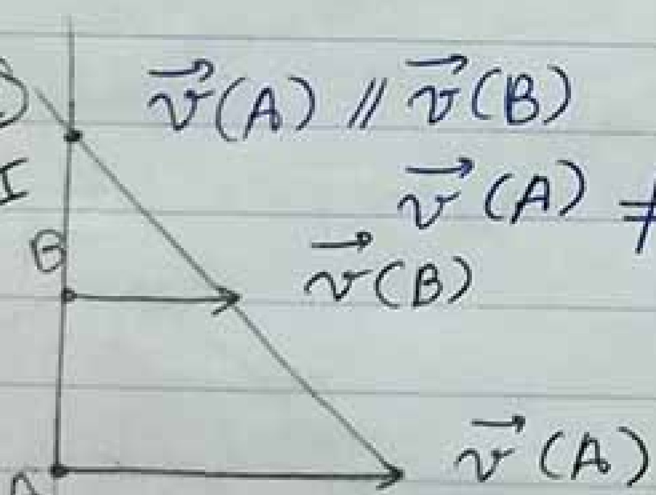
تمرين: ليكن لدينا دائرة وقضيب AB تتحرك نهايته A على محيط نصف الدائرة ويستند القضيب على الحافة C من الدائرة.

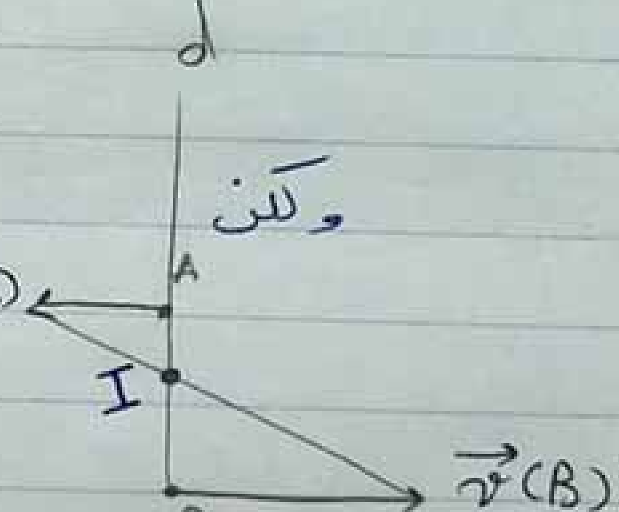
الحالة الثانية ②

$\vec{v}(A) \parallel \vec{v}(B)$

$\vec{v}(A) \neq \vec{v}(B)$

ولكن





إن نظرية المساقط لا تتحقق في هذه الحالة إلا إذا كان المسقط معدوم أي إذا كان المستقيم d عمودي على المنحى المشترك للسرعتين أي ينطبق d_1 و d_2 على d وعلى AB

ثم نصل بين نهايتين السرعتين ⇐ نقطة تقاطع هذا المستقيم الواصل بين النهايتين مع d تكون هي المركز الآني للدوران.

حسب تالس نجد:

$$\frac{|\vec{v}(A)|}{|\vec{IA}|} = \frac{|\vec{v}(B)|}{|\vec{IB}|}$$

⟵ I مركز آني للدوران.

③ الحالة الثالثة :

$\vec{v}(A) = \vec{v}(B)$

$\vec{v}(A) \parallel \vec{v}(B)$