26/11/2013 المحاضرة الرابعة عشر

مبرهنة: لتكن $(M_i)_{i=1,\dots,n}$ أسرة مودولات جزئية من مودول M عندئذٍ:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = \{x \in M \,;\, x = \sum_{i=1}^{n} m_i \,;\, m_i \in M_i\}$$ مودول جزئي من M

ويكون $\sum_{i=1}^{n} M_i$ مباشراً إذا كان كل عنصر $x \in \sum_{i=1}^{n} M_i$ يكتب بشكل وحيد

بالصورة $\sum_{i=1}^{n} m_i$ حيث $m_i \in M_i$

ويكون M مجموعاً مباشراً لأسرة المودولات $(M_i)_{i=1,\dots,n}$ إذا كان:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{n} (M_i) \text{ مباشر}$$

سؤال: إذا ضربت m_1, m_2 بـ α, β هل نعتبر كتابة جديدة لـ x؟

$x = m_1 + m_2$ بشكل وحيد

ونكتب عندئذٍ $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ وهذا يعني أن كل عنصر $m \in M$ يكتب

بشكل وحيد بالشكل:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \,;\, m_i \in M_i$$

مبرهنة إذا كان $(M_i)_{i=1,\dots,n}$ أسرة مودولات جزئية من مودول M فإن القضايا

التالية متكافئة:

(1) $\sum_{i=1}^{n} M_i$ مباشر

(2) إذا كان $\sum_{i=1}^{n} m_i = 0$ حيث $m_i \in M_i$ فإن $m_i = 0 \;\forall\, i = 1,\dots,n$

(3) سؤال $M_j \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} M_i = 0$

المودولات الجزئية معاً تتقاطع بالمودول الصفري لذلك قلنا إن بين مجموعتين تقاطعهما ϕ

الإثبات:

$(1) \longrightarrow (2)$: إذا كان $\sum_{i=1}^{n} m_i = 0$ حيث $m_i \in M_i$

فإنّ: $\sum_{i=1}^{n} m_i = 0 = \sum 0$ وحسب الفرض (1) ينتج أنّ:

$$m_i = 0 \quad (\forall i = 1, \dots, n)$$

(2) ⟶ (3): أيّ أنّ: $x \in M_j \cap \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} M_i$ حيث $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\Rightarrow x \in M_j \quad \text{and} \quad x \in \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} M_i$$

$$x = m_j \quad \text{and} \quad x = \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} m_i \;،\; m_i \in M_i$$

وبالتالي:

$$m_j = \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} m_i$$

[illegible]

$$m_1 + m_2 + \dots + (-m_j) + \dots + m_n = 0$$

وحسب الفرض (2) ينتج أنّ: $x = 0$

أي:

$$M_j \cap \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} M_i = 0$$

[illegible]

(3) ⟹ (1): لكن: $x \in \sum_{i=1}^{n} M_i$ حيث:

$$x = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m_i'$$

[illegible] $m_i - m_i' = 0$

← أيّاً كان $j = \{1, \dots, n\}$ فإنّ:

$$m_j + \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} m_i = m_j' + \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} m_i'$$

$$\Rightarrow \underbrace{m_j - m_j'}_{M_j} = \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} m_i' - m_i}_{\in \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} M_i}$$

[illegible]

ومنه :

$$m_j - m'_j \in M_j \cap \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} M_i$$

وحسب الفرض (3) ينتج أنَّ :

$$m_j - m'_j = 0 \qquad \forall\, j \in \{1, \dots, n\}$$

إذاً العنصر x يكتب بشكل وحيد
فالمجموع $\sum_{i=1} M_i$ مباشر

وهو المطلوب

[illegible]
[illegible]

تعريف : ليكن A, B مودولين جزئيين من مودول M على حلقة R .
نقول عن A, B إنهما متتامان في M إذا تحقق :

$$M = A \oplus B$$

ماهي الشروط الواجب توفرها لكي M إذا

انتهت المحاضرة الرابعة عشر