

26/11/2013

المحاضرة الرابعة عشر

مبرهنة: لتكن $(M_i)_{i=1, \dots, n}$ أسرة مورولات جزئية من مورول M عندئذ:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i = \left\{ x \in M \text{ و } x = \sum_{i=1}^n m_i \text{ و } m_i \in M_i \right\}$$

ويكون $\sum_{i=1}^n M_i$ مباشراً إذا كان كل عنصر $x \in \sum_{i=1}^n M_i$ يملك شكلاً وحيداً

$$\text{بالصورة } \sum_{i=1}^n m_i \text{ حيث } m_i \in M_i$$

ويكون M مجموعاً مباشراً لأسرة المورولات $(M_i)_{i=1, \dots, n}$ إذا كانت:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i \text{ and } \sum_{i=1}^n (M_i) \text{ مباشر}$$

سؤال إذا
عزيت m_1, m_2
بـ α, β
فإن $\alpha + \beta$
فإن $\alpha + \beta$

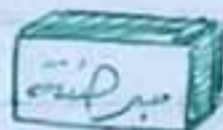
وتلعب عندئذ $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ ، ولتكن $m \in M$ يملك شكلاً

محددة m_1, m_2
 $x = m_1 + m_2$
بشكل

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \text{ و } m_i \in M_i$$

شكلاً وحيداً بالشكل:

مبرهنة إذا كان $(M_i)_{i=1, \dots, n}$ أسرة مورولات جزئية من مورول M فإنها، لقضايا



$$(1) \sum_{i=1}^n M_i \text{ مباشر}$$

(2) إذا كان $\sum_{i=1}^n m_i = 0$ حيث $m_i \in M_i$ فإن $m_i = 0 \forall i=1, \dots, n$

المعطيات الجزئية
مكثرت تقاطع
المورول
الطوري

$$(3) \bigcap_{i=1, i \neq j}^n M_i = 0 \text{ (سؤال)}$$

لذلك لا يمكن أن
يتم تحديد
بعض المعطيات

الإثبات: (1) \rightarrow (2) إذا كان $\sum_{i=1}^n m_i = 0$ حيث $m_i \in M_i$

فإنَّ: $\sum_{i=1}^n m_i = 0 = \sum 0$ وحسب الفرض (1) ينتج أنَّ:

$$(\forall i=1, \dots, n) \quad m_i = 0$$

(2) \rightarrow (3): أيَّا كان $x \in M_j \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n M_i$ حيث $j \in \{1, \dots, n\}$

$\Rightarrow x \in M_j$ and $x \in \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n M_i$

$$x = m_j \quad \text{and} \quad x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n m_i \quad ; \quad m_i \in M_i$$

وبالتالي:

$$m_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n m_i$$

$$m_1 + m_2 + \dots + (-m_j) + \dots + m_n = 0$$

وحسب الفرض (2) ينتج أنَّ:

$$x = 0 \quad \text{إنَّ:} \quad M_j \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n M_i = 0$$

أي أنَّه إذا كان x في تقاطع M_j مع مجموع المجموعات الأخرى، فإن $x=0$.

(1) \rightarrow (3): أيَّا كان $x \in \sum_{i=1}^n M_i$ حيث

$$x = \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n m'_i$$

أي أنَّه يمكن كتابة x كمجموع عناصر من M_i بطريقتين مختلفتين، أي $m_i - m'_i = 0$.

أيَّا كان $j \in \{1, \dots, n\}$ فإنَّ:

$$m_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n m_i = m'_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n m'_i$$

$$\Rightarrow m_j - m'_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n m'_i - m_i$$

أي أنَّه $m_j - m'_j \in \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n M_i$

$$m_j - m_j \in M_j \cap \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n M_i$$

معناه :

بحسب الفرض (3) نتيجاتنا :

$$m_j - m_j = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

إذا العنصر x يكتب بشكل وحيد

فالمجموع $\sum_{i=1}^n M_i$ مباشر

وهو المطلوب
شكراً

\mathbb{R}^n
لأننا نعلم أن مستقيم
و مستقيم

تعريف: ليكن A, B مورولين جزئيين من مورول M على حلقة R

نقول عن A, B انهما متتامان في M إذا تحقق :

$$M = A \oplus B$$

ما هي الشروط الواجب توافرها لتتامين M ان

انتهت المحاضرة الرابعة عشر
شكراً