8/11/2013

المحاضرة السابعة عشر

تعاريف:

ليكن $M = M_1 \oplus M_2$ موديولاً على حلقة R

- نسمّي كلاً من:

$$Pr_i : M \longrightarrow M_i$$
$$(m = m_1 + m_2) = m_i \qquad ; \quad i = 1,2.$$

إسقاط للموديول M على الموديول M_i $(i = 1, 2)$ توازياً مع M_j بحيث $i \neq j$

- ونقول عن تشاكل $f : M \longrightarrow M$ إنه إسقاط إذا كان $M = M_1 \oplus M_2$ وكان f إسقاطاً لـ M_i توازياً مع M_j بحيث $i \neq j$

- ونقول عن f إنه جامد إذا كان $f \circ f = f$

مبرهنة إذا كان $M = M_1 \oplus M_2$ موديولاً على حلقة R وكان M و $f : M \longrightarrow M$ تشاكلاً موديولياً على R وكان f إسقاطاً لـ M على M_1 توازياً مع M_2 فإنّ:

1) $M_1 = Im f = \{x \in M : f(x) = x\}$
2) $M_2 = \ker f$
3) f جامد

الإثبات:

(1) بما أنّ f إسقاط لـ M على M_1 توازياً مع M_2 فإنّ $M_1 = Im f$

واضح أنّ:

$$\{x \in M ; f(x) = x\} \subseteq Im f = M_1 \ldots \text{(I)}$$

كما أنّه أياً كان $m_1 \in M_1$ فإنّ: m_1 يكتب بالشكل الوحيد $m_1 = m_1 + 0$

ويكون:

$$f(m_1) = f(m_1 + 0) = m_1$$

وبالتالي:

$$m_1 \in \{x \in M : f(x) = x\} \ldots \text{(II)}$$

من الاحتواءين (I) و (II) نستنتج أنّ:

$$M_1 = Im f = \{x \in M ; f(x) = x\}$$

No matter how you feel... get up
dress up, show up and never give up

لأنّ f إسقاط

(2): لدينا

$$m_2 \in M_2 \Leftrightarrow m_2 = 0 + m_2 \Leftrightarrow f(m_2) = 0 \Leftrightarrow m_2 \in \ker f$$

نريد أن نبرهن على أنّ $(f\circ f)(m) \overset{?}{=} f(m)$

(3): أياً كان $m \in M$:

$$(f\circ f)(m) = f(\underbrace{f(m)}_{\in \operatorname{Im} f})\overset{(1)}{=} f(m)$$

$f(m)=m \leftarrow \operatorname{Im} f \ni$

مناقشة حول المبرهنة السابقة:

- إذا كان $f: M = M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_1$ إسقاط لـ M على M_1 توازياً مع M_2

$$f(m = m_1 + m_2) = m_1$$

عندئذٍ:

$$M_1 = \operatorname{Im} f = \{x \in M ; f(x) = x\}$$
$$M_2 = \ker f$$

أي
$$M = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$$

- وإذا كان:

$$f: M = M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2$$
$$f(m = m_1 + m_2) = m_2$$

إسقاط لـ M على M_2 توازياً مع M_1 عندئذٍ:

$$M_1 = \ker f$$
$$M_2 = \operatorname{Im} f = \{x \in M ; f(x) = x\}$$

ويكون:
$$M = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$$

- وبالتالي إذا كان $f: M \longrightarrow M$ إسقاط فإنّ:

$$M = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$$

والعكس صحيح.

- إذا كان $f: M \longrightarrow M$ إسقاط فإنّ f جامد.
- ولندرس الآن المسألة العكسية:

مبرهنة إذا كان $f: M \to M$ فإن f إسقاط.

يكفي أن نبرهن على أنه: $M = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$

الإثبات:

لإثبات المطلوب يكفي أن نثبت أنه:

$$M = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$$

يجب أن نثبت أنه $M = \ker f + \operatorname{Im} f$ وأنه $\ker f \cap \operatorname{Im} f = 0$

أياً كان $m \in M$ فإنه:

$$m = m - f(m) + f(m) \longrightarrow \in \operatorname{Im} f$$

ولنبرهن على أنه $m - f(m) \in \ker f$:

لدينا: $f(m - f(m)) = f(m) - f(f(m))$

$$= f(m) - f(m) = 0$$

$$\Rightarrow m - f(m) \in \ker f$$

وبالتالي: $M = \ker f + \operatorname{Im} f$

ومن جهة ثانية: أياً كان:

$$x \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$$

$$\to f(x) = 0 \wedge \exists m \in M;\ x = f(m)$$

$$\to f(f(m)) = 0 \xrightarrow{\text{لإسقاط}} f(m) = 0$$

أي: $x = 0$ وبالتالي $\ker f \cap \operatorname{Im} f = 0$

إذاً $M = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$

أي أنه f إسقاط.

وهو المطلوب

انتهت المحاضرة السابعة عشر