الفصل الثالث : الحلول العددية لجملة معادلات غير خطية :

تعريف :

نقول عن المعادلة $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ أنها معادلة خطية إذا كانت من الشكل

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + \beta = 0$$

وكل شكل آخر ندعوه معادلة غير خطية.

مثال :

$2x + 3y - z + 7 = 0$ معادلة خطية

$x^2 - y^2 + 2xy + z = 0$ معادلة غير خطية

$\sin x + e^y + z^z = 0$ معادلة غير خطية

$3x + 1 = 0$ معادلة خطية

$x^2 + x + 1 = 0$ معادلة غير خطية

سوف نهتم في هذا الفصل بالحلول العددية لجملة معادلتين غير خطيتين بمجهولين من الشكل :

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\} (*)$$

نقول عن $(\bar{x}, \bar{y})$ أنه جذر للجملة $(*)$ أو حل مشترك للجملة إذا كان $f(\bar{x}, \bar{y}) = g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

ولنفرض أن (x_0, y_0) نقطة في جوار الحل المشترك $(\bar{x}, \bar{y})$ عندئذ لحل الجملة $(*)$ انطلاقا من (x_0, y_0) نتبع الطرق العددية التالية :

أولا : طريقة نيوتن :

بفرض $f(x,y),\ g(x,y)$ تابعان قابلان للاشتقاق و الاشتقاق الجزئي بالنسبة للمتحولات (x,y) ولنعرف الجاكوبيان (اليعقوبي) للتابعين $f\ ,\ g$ كما يلي :

$$J(f,g) = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = f_x g_y - f_y g_x$$

عندئذ إذا كان $J(f,g) \neq 0$ فإن الحل المشترك للجملة $(*)$ انطلاقا من (x_0, y_0) حسب نيوتن يعطى بالقوانين التكرارية التالية :

$$\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}_{(x_n,y_n)}} \quad \& \quad \boxed{y_{n+1}=y_n-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}_{(x_n,y_n)}}$$ (للحفظ)

بفرض ε الدقة المطلوبة عندئذ نتوقف عن التكرار عندما

$$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon \ \& \ |y_{n+1}-y_n|<\varepsilon$$

ويكون : $(x_n,y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}(\bar{x},\bar{y})$

مثال :

باستخدام طريقة نيوتن و انطلاقا من النقطة $(1,1)$ أوجد حل مشترك تقريبي لجملة المعادلتين التاليتين :

$$f(x,y)=x^2+y^2-1=0 \quad \& \quad g(x,y)=y-x=0$$

بدقة $\varepsilon=0.02$

الحل :

نلاحظ أن

$$J(f,g)=\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2x+2y\neq 0$$

⇐ يوجد حل للجملة و ليكن $(\bar{x},\bar{y})$

$$(x_0,y_0)=(1,1)\Rightarrow J(x_0,y_0)=J(1,1)=4\neq 0$$

$$x_1=x_0-\frac{1}{4}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}=1-\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0.75$$

$$y_1=y_0-\frac{1}{4}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}=1-\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=0.75$$

$$(x_1,y_1)=(0.75,0.75)\Rightarrow J(x_1,y_1)=3\neq 0$$

$$x_2=x_1-\frac{1}{3}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}_{(x_1,y_1)}=0.75-\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 0.125 & 1.5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0.7083$$

$$y_2=y_1-\frac{1}{3}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}_{(x_1,y_1)}=0.75-\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1.5 & 0.125 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=0.7083$$

$$(x_2,y_2) = (0.7083,0.7083) \Rightarrow J(x_2,y_2) = 2.8332 \neq 0$$

$$x_3 = x_2 - \frac{1}{2.8332}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}_{(x_1,y_1)} = 0.7083 - \frac{1}{2.8332}\begin{vmatrix} 0.0033 & 1.4166 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.7071$$

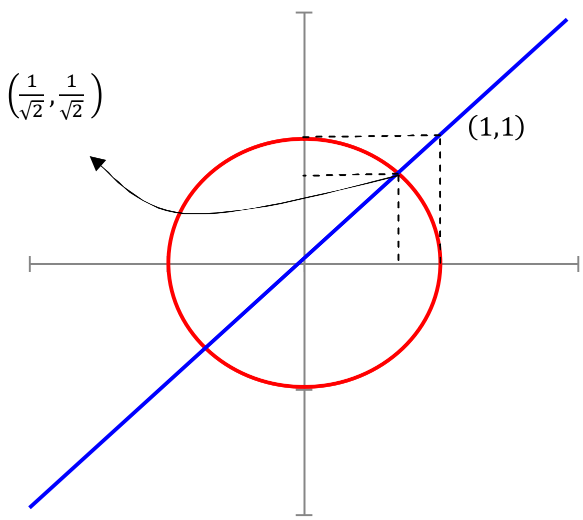
$$y_3 = y_2 - \frac{1}{2.8332}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}_{(x_1,y_1)} = 0.7083 - \frac{1}{2.8332}\begin{vmatrix} 1.4166 & 0.0033 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.7071$$

$$|x_3 - x_2| = 0.001 < \varepsilon \quad \& \quad |y_3 - y_2| = 0.001 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (\bar{x},\bar{y}) \approx (x_3,y_3) = (0.7071 \ , \ 0.7071)$$

ولنتحقق $f(x_3,y_3) = 0.00001 \quad \& \quad g(x_3y_3) = 0$

كما نلاحظ أن : $(x_n,y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



مثال$_2$:

باستخدام طريقة نيوتن و انطلاقا من النقطة $(1,2)$ أوجد حل مشترك تقريبي لجملة المعادلتين التاليتين :

$$f(x,y) = e^x - y - 2 = 0 \quad \& \quad g(x,y) = ln\,(x+2) - y = 0$$

بدقة $\varepsilon = 0.02$

الحل :

نلاحظ أن $$J(f,g)=\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^x & -1 \\ \frac{1}{x+2} & -1 \end{vmatrix}=\frac{1}{x+2}-e^x\neq 0$$

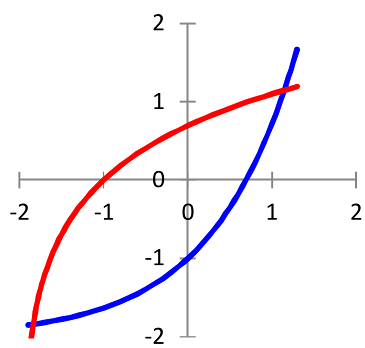
$\Leftarrow$ يوجد حل للجملة و ليكن $(\bar{x},\bar{y})$

$$(x_0,y_0)=(1,2)\Rightarrow J(x_0,y_0)=J(1,2)=2.3849\neq 0$$

$$x_1=x_0-\frac{1}{2.3849}\begin{vmatrix} f & f_y \\ g & g_y \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}=1+\frac{1}{2.3849}\begin{vmatrix} -1.2817 & -1 \\ -0.9013 & -1 \end{vmatrix}=1.1595$$

$$y_1=y_0-\frac{1}{2.3849}\begin{vmatrix} f_x & f \\ g_x & g \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}=1+\frac{1}{2.3849}\begin{vmatrix} 2.7182 & -1.2817 \\ 0.3333 & -0.9013 \end{vmatrix}=1.1518$$

$$(x_1,y_1)=(1.1595\,,1.1518)\Rightarrow J(x_1,y_1)=-2.8718\neq 0$$



$$x_2=1.1595+\frac{1}{2.8718}\begin{vmatrix} 0.0365 & -1 \\ -0.0013 & -1 \end{vmatrix}=1.1463$$

$$y_2=1.1518+\frac{1}{2.8718}\begin{vmatrix} 3.1883 & 0.0365 \\ 0.3165 & -0.0013 \end{vmatrix}=1.1463$$

$$|x_2-x_1|=0.0132<\varepsilon\ \ \&\ \ |y_3-y_2|=0.0132<\varepsilon$$
$$\Rightarrow(\bar{x},\bar{y})\approx(x_2,y_2)=(1.1463\,,1.1463)$$

وظيفة :

أعد المثال السابق من أجل :

$$f(x,y)=ln\,x^2+y-4=0\qquad\&\qquad g(x,y)=x^2y-2e^y=0$$

و النقطة $(2\,,1.5)$ و الدقة $\varepsilon=0.02$

... انتهت المحاضرة (14) ...