مبرهنة: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل F وليكن $W_1 = span(S_1)$ و $W_2 = span(S_2)$ ، W_1 ، W_2 فضاءان شعاعيان جزئيان في V حيث $S_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ $S_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ مجموعات جزئية من V. وإذا كانت $S = S_1 \cup S_2$ فإن $V = W_1 + W_2$ إذا وفقط إذا كان $V = span\, S$.

الإثبات: "$\Longleftarrow$" الفرض: $V = W_1 + W_2$

المطلوب: $V = span(S)$

$$\forall v \in V = W_1 + W_2 \Longrightarrow \exists w_1 \in W_1 ; w_2 \in W_2 ; v = w_1 + w_2$$

$$w_1 \in W_1 \Longrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F ; w_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$w_2 \in W_2 \Longrightarrow \exists \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in F ; w_2 = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_m u_m$$

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_m u_m$$

وعليه v يكتب كتركيب خطي بدلالة عناصر S

$$S = S_1 \cup S_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n, u_1, u_2, \dots, u_m\}$$

"$\Longrightarrow$" $V = span(S)$

$$\forall v \in V = span(S) : \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in F$$

$$v = \underbrace{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n}_{\in W_1} + \underbrace{\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_m u_m}_{\in W_2}$$

/ /

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists w_1 \in W_1 : w_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \\ \exists w_2 \in W_2 : w_2 = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_m u_m \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$v = w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$$

$$\Longrightarrow V \subseteq W_1 + W_2$$

وحسب برهنة سابقة فإن $W_1 + W_2$ فضاء شعاعي جزئي في V أي $W_1 + W_2 \subseteq V$ وبالتالي $V = W_1 + W_2$

ملاحظة: ليكن V فضاء شعاعي معرف على حقل K ولتكن $W_1 = \operatorname{Span} S_1$ ، $W_2 = \operatorname{Span} S_2$ فضاءات شعاعية جزئية في V و $S = S_1 \cup S_2$ فإن W_1, W_2 متكاملان إذا تحقق:

$\boxed{1}$: $S_1 \cap S_2 = \emptyset \Leftarrow W_1 \cap W_2 = 0$

$\boxed{2}$: $V = \operatorname{Span}(S) \Leftarrow V = W_1 + W_2$

تمرين: ليكن $V = \mathbb{R}^3$ فضاء شعاعي معرف على حقل $\mathbb{R}$ ولتكن:

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 0\}$$

$$W_2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$W_3 = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3\}$$

ولتكن فضاءات شعاعية جزئية في V أثبت أن $V = W_1 + W_2 = W_2 + W_3 = W_1 + W_3$ بين أي منها هو مجموع مباشر

$$W_1 = \{(x, y, -x-y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x, 0, -x) + (0, y, -y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$= \operatorname{Span} S_1$$

حيث $S_1 = \{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (0, 1, -1)\}$

$$W_3 = \{x(1, 1, 1) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$W_3 = \operatorname{Span} S_3$$

حيث $S_3 = \{u(1, 1, 1)\}$

$$\forall v = (x, y, z) \in V : v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 u$$

$$(x, y, z) = (\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \lambda_1 + \lambda_3 \\ y = \lambda_2 + \lambda_3 \\ z = \lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ بالجمع $x + y + z = 3\lambda_3$

$$\Rightarrow \lambda_3 = 1/3(x+y+z) \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_1 = x - 1/3(x+y+z) = 1/3(2x-y-z) \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_2 = y - 1/3(x+y+z) = 1/3(2y-x-z) \in \mathbb{R}$$

ومنه يوجد $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ بحيث $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$

ومنه $\forall v \in V$ يكتب كتركيب خطي بدلالة عناصر

$S = S_1 \cup S_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ ومنه $V = \mathrm{Span}(S)$

وبما أن $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ فإن $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ وبالتالي

$V = W_1 \oplus W_2$ منه المجموع مباشر //.

تمرين: ليكن $V = \mathbb{R}^4$

$$W_1 = \{(x,y,z,t) \in V ; x + y = z ; x - t = z - y\}$$

$$W_2 = \{(x,y,z,t) \in V ; 2x - y + t = 0 ; x + 3y - z = 0\}$$

فضاءات شعاعية جزئية في V. أوجد قاعدة وبعد كل من W_1 ، W_2 ، $W_1 \cap W_2$ ، $W_1 + W_2$. هل W_1 ، W_2 متكاملان.