14/11/2013

المحاضرة الحادية عشر

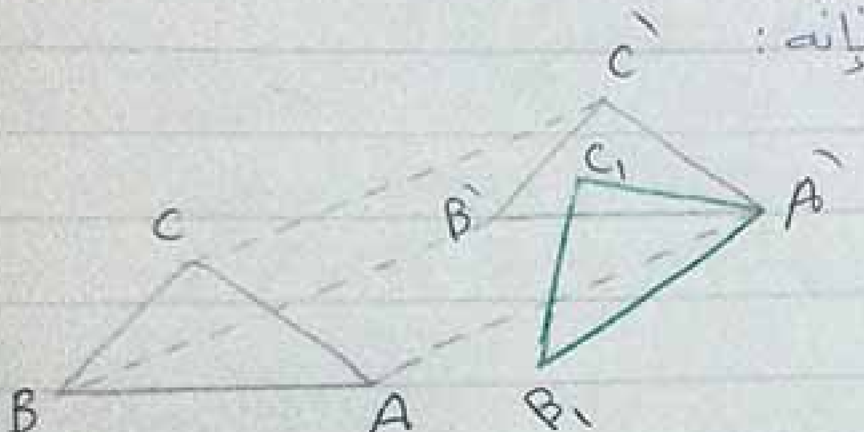
الحركة العامة للجسم الصلب.

تعريف:

هي حركة جسم صلب (طليق) غير مقيد، رأينا سابقاً أن عدد درجات حرية الجسم الصلب الطليق في الفراغ يساوي 6 درجات وبالتالي يوجد 6 معادلات للحركة.

موضوعة مثال:

اذا تحرك الجسم في الفراغ بدون قيد فإنه:



$$\forall\, A,B,C \in S : \quad \underbrace{ABC \xrightarrow[A]{\text{انسحاب}} A'B'C'}_{\text{قطب يحافظ على المنحى}} \xrightarrow[\text{[زوايا أولر]}\ A']{\text{دوران حول النقطة}} A'B_1C_1$$

تعيين موضع النقطة M:

حيث A قطب الحركة:

$$\forall\, M \in S : \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{AM}$$

$$\vec{v}(M) = \underbrace{\vec{v}(A)}_{\text{انسحابية}} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}}_{\text{دورانية حول } A}$$

مبرهنة: ان شعاع الدوران لا يتعلق باختيار القطب.

البرهان:

$$\forall\, M \in S, \quad \vec{v}(M) = \vec{v}(A) + \vec{\omega}_A \wedge \overrightarrow{AM} \quad (1)$$

(A قطب الحركة)

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(B) + \vec{\omega}_B \wedge \overrightarrow{BM} \quad (2)$$

(B قطب الحركة)

$$\vec{v}(A) + \vec{\omega}_A \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{v}(B) + \vec{\omega}_B \wedge \overrightarrow{BM}$$

نعوض A قطب الحركة

$$\vec{v}(A) + \vec{\omega}_A \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{v}(A) + \vec{\omega}_A \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_B \wedge \overrightarrow{BM}$$

$$\vec{\omega}_A \wedge (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) = \vec{\omega}_B \wedge \overrightarrow{BM}$$

$$\vec{\omega}_A \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{\omega}_B \wedge \overrightarrow{BM} \qquad \forall M \in S ;\ \vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}$$

$$\forall M \in S : \vec{v}(M) = \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

التسارع:

شعاعيا:

$$\forall M \in S ;\ \vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

الزاوي O, ε

$$= \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d(\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M})}{dt}$$

$$= \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}$$

$$= \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} - \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$$

$$= \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} - \vec{\omega} \wedge \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$$

$$= \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} - \vec{\omega} \wedge \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$$

$$= \underbrace{\vec{\Gamma}(O)}_{\text{انسحابي}} + \underbrace{\vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})}_{\text{دوراني}}$$

$$= \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$$

محور الفتل الآني: هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط التي تكون فيها سرعة النقطة موازية لشعاع الدوران

$\vec{v}(o) \parallel \vec{\omega}$

Δ محور الفتل الآني و $o \in \Delta$.

متماسكة $\dfrac{v_x(o)}{p} = \dfrac{v_y(o)}{q} = \dfrac{v_z(o)}{r}$ $\quad o(x,y,z) \in \Delta$

ثابتة $\dfrac{v_{x_1}(o)}{p_1} = \dfrac{v_{y_1}(o)}{q_1} = \dfrac{v_{z_1}(o)}{r_1}$ $\quad o(x_1,y_1,z_1) \in \Delta$

ولكن بما أنّ $\vec{v}(o) \parallel \vec{\omega}$ فإنّ $\vec{v}(o) = b\vec{\omega}$

$\forall M \in S : \vec{v}(M) = \vec{v}(o) + \vec{\omega} \wedge \vec{oM} = b\vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge \vec{oM}$

وهو نفس قانون السرعة في الحركة اللولبية

خلاصة: يمكن النظر إلى الحركة العامة للجسم الصلب على أنها حركة لولبية آنية حول محور آني للفتل أو هي حركة فلكية آنية محورها يوازي شعاع الدوران الآني . تسمى b بخطوة اللولب في لحظة ما وفي هذه الحالة نقول أن الحركة العامة هي مماسة لحركة لولبية في كل لحظة .

لتعيين b :

$$\vec{v}(M) = b\vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge \vec{oM}$$

$$\vec{\omega} \cdot \vec{v}(M) = b\vec{\omega}^2 + \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{oM})$$

$$\vec{\omega} \cdot \vec{v}(M) = b\vec{\omega}^2$$

$$\Rightarrow b = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{v}(M)}{\omega^2}$$

نسمي العناصر: (b, o, Δ, ω) عناصر الفتل الآني حيث $o \in \Delta$

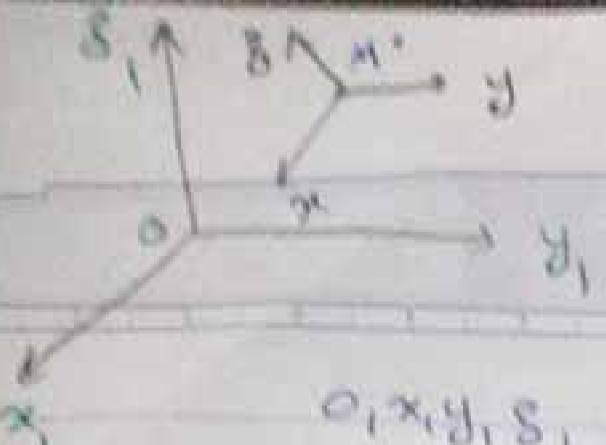
ملاحظات:

1- إذا كانت $\vec{v}(o) = \vec{0}$ فالحركة مماسة لحركة دورانية في لحظة معينة

2- إذا كانت $\vec{\omega} = \vec{0}$ فالحركة مماسة لحركة انسحابية .

3- إذا كان $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ و $\vec{v}(o) \neq \vec{0}$ فالحركة مماسة لحركة لولبية .

وتسمى الحركة اللولبية المماسة لحركة الجسم الصلب الطليق بالفتل المماس في حركة الجسم



الدراسة التحليلية: نختار معلمين للحاسب: الثابتة $O_1x_1y_1z_1$

والمتحركة $Oxyz$

$$\forall M \in S : \vec{O_1M} = \vec{O_1O} + \vec{OM}$$

$$\vec{O_1M} = x_0\vec{i_1} + y_0\vec{j_1} + z_0\vec{k_1} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

(x_0, y_0, z_0) متغيرة.

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ متغيرة تتعين بدلالة زوايا أولر ψ, θ, φ

(ψ, θ, φ) و (x_0, y_0, z_0) وسطاء الحركة

O مركز الحركة
على المتحركة

$$\forall M \in S ; \vec{v}(M) = \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

$$\vec{v}(M) = (v_x(O), v_y(O), v_z(O)) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}(M) = (v_{x_1}(O), v_{y_1}(O), v_{z_1}(O)) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$$

على المتحركة

$$\vec{\Gamma}(M) = (\Gamma_x(O), \Gamma_y(O), \Gamma_z(O)) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p' & q' & r' \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ v_x(M) & v_y(M) & v_z(M) \end{vmatrix}$$

على الثابتة

$$\vec{\Gamma}(M) = (\Gamma_{x_1}(O), \Gamma_{y_1}(O), \Gamma_{z_1}(O)) + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ p_1' & q_1' & r_1' \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ v_{x_1}(M) & v_{y_1}(M) & v_{z_1}(M) \end{vmatrix}$$