ثانياً : طريقة نيوتن المبسطة :

بفرض $f(x,y),\ g(x,y)$ تابعان قابلان للاشتقاق و الاشتقاق الجزئي بالنسبة للمتحولات (x,y) وبفرض $J(f,g)\neq 0$ وايضاً $f_x\times g_y\neq 0$ عندئذ فإن الحل المشترك للجملة $(*)$ < من المحاضرة السابقة >
انطلاقاً من (x_0,y_0) حسب نيوتن المبسطة يعطى بالقوانين التكرارية التالية :

$$\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n,y_n)}{f_x(x_n,y_n)}}\quad \&\quad \boxed{y_{n+1}=y_n-\frac{g(x_n,y_n)}{g_y(x_n,y_n)}}$$ (للحفظ)

بفرض ε الدقة المطلوبة عندئذ نتوقف عن التكرار عندما

$$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon\ \&\ |y_{n+1}-y_n|<\varepsilon$$

و بفرض $(\bar{x},\bar{y})$ حل للجملة يكون : $(x_n,y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}(\bar{x},\bar{y})$

مثال :

باستخدام طريقة نيوتن المبسطة و انطلاقا من النقطة $(1,1)$ أوجد حل مشترك تقريبي لجملة المعادلتين التاليتين

$$f(x,y)=e^x-y-2=0\quad \&\quad g(x,y)=ln\,(x+2)-y=0$$

بدقة $\varepsilon=0.02$

الحل :

نلاحظ أن
$$J(f,g)=\begin{vmatrix} f_x & f_y\\ g_x & g_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^x & -1\\ \frac{1}{x+2} & -1\end{vmatrix}=\frac{1}{x+2}-e^x\neq 0$$

$\Leftarrow$ يوجد حل للجملة و ليكن $(\bar{x},\bar{y})$

كذلك : $f_x=e^x\neq 0\quad \&\quad g_y=-1\neq 0$

$$(x_0,y_0)=(1,1)\Rightarrow$$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0,y_0)}{f_x(x_0,y_0)}=1-\frac{e-1-2}{e}=1.1036$$

$$y_1=y_0-\frac{g(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)}=y_0-\frac{ln\,(x+2)-y_0}{-1}=ln\,(x+2)=ln\,(1+2)=1.0986$$

$$(x_1,y_1)=(1.1036\,,1.0986)\ \Rightarrow$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1,y_1)}{f_x(x_1,y_1)} = 1.1036 - \frac{e^{1.1036} - 1.0986 - 2}{e^{1.1036}} = 1.1313$$

$$y_2 = y_1 - \frac{g(x_1,y_1)}{g_y(x_1,y_1)} = ln\,(1.1036 + 2) = 1.1325$$

$$(x_2, y_2) = (1.1313\,, 1.1325) \Rightarrow$$

$$x_3 = 1.1313 - \frac{e^{1.1313} - 1.1325 - 2}{e^{1.1313}} = 1.1418$$

$$y_3 = ln\,(1.1313 + 2) = 1.1414$$

$$|x_3 - x_2| = 0.01 < \varepsilon \quad \& \quad |y_3 - y_2| = 0.008 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \approx (x_3, y_3) = (1.1418\,, 1.1414)$$

مثال :

باستخدام طريقة نيوتن المبسطة و انطلاقا من النقطة $(0.8,2.4)$ أوجد حل مشترك تقريبي لجملة المعادلتين التاليتين

$$f(x,y) = x - \sin\frac{y}{2} = 0 \quad \& \quad g(x,y) = x + \cos y = 0$$

بدقة $\varepsilon = 0.035$

الحل :

نلاحظ أن $J(f,g) = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} \\ 1 & -\sin y \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} - \sin y \neq 0$

⇐ يوجد حل للجملة و ليكن $(\bar{x}, \bar{y})$

كذلك : $f_x \times g_y = -\sin y \neq 0$

$$(x_0, y_0) = (0.8,2.4) \Rightarrow$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0,y_0)}{f_x(x_0,y_0)} = x_0 - \frac{x_0 - \sin\frac{y_0}{2}}{1} = x_0 - x_0 + \sin\frac{y_0}{2} = \boxed{\sin\frac{y_0}{2}} = \sin\frac{2.4}{2} = 0.932$$

$$y_1 = y_0 - \frac{g(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)} = y_0 - \frac{x_0 + \cos y_0}{-\sin y_0} = \boxed{y_0 + \frac{x_0 + \cos y_0}{\sin y_0}} = 2.4 + \frac{0.8 + \cos 2.4}{\sin 2.4} = 2.4926$$

$$(x_1, y_1) = (0.932\,, 2.4926) \Rightarrow$$

للسرعة سنعوض بالقوانين $\left(x_{n+1} = \sin\frac{y_n}{2} \quad \& \quad y_{n+1} = y_n + \frac{x_n + \cos y_n}{\sin y_n}\right)$ مباشرة أي :

$$x_2 = 0.9478 \quad \& \quad y_2 = 2.7164 \Rightarrow (x_2, y_2) = (0.9478\,, 2.7164) \Rightarrow$$

$$x_3 = 0.9774 \quad \& \quad y_3 = 2.8057 \Rightarrow (x_3, y_3) = (0.9774\,, 2.8057) \Rightarrow$$

$$x_4 = 0.9859 \quad \& \quad y_4 = 2.9066 \Rightarrow (x_4, y_4) = (0.9859\,, 2.9066) \Rightarrow$$

$$x_5 = 0.9931 \quad \& \quad y_5 = 2.964 \Rightarrow (x_5, y_5) = (0.9931\,, 2.964) \Rightarrow$$

$$x_6 = 0.996 \quad \& \quad y_6 = 3.0139 \Rightarrow (x_6, y_6) = (0.996\,, 3.0139) \Rightarrow$$

$$x_7 = 0.9979 \quad \& \quad y_7 = 3.0464 \Rightarrow (x_7, y_7) = (0.9979\,, 3.046)$$

$$|x_7 - x_6| = 0.0019 < \varepsilon \quad \& \quad |y_7 - y_6| = 0.0321 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \approx (x_7, y_7) = (0.9979\,, 3.046)$$

مثال :

باستخدام طريقة نيوتن و نيوتن المبسطة و انطلاقا من النقطة $(1,1)$ أوجد حل مشترك تقريبي لجملة المعادلتين التاليتين

$$f(x,y) = x - y = 0 \quad \& \quad g(x,y) = \sin x + \cos 2y = 0$$

بدقة $\varepsilon = 0.025$

... انتهت المحاضرة (15) ...