متباينة تشيبيشيف:

إذا كان لدينا $k \geq 1$ و $x_1, x_2, \dots, x_n$ مجموعة قياسات متوسطها $\bar{x}$ وانحرافها المعياري S عندئذ: عدد القياسات التي تقع ضمن المجال $I=[\bar{x}-kS, \bar{x}+kS]$ يساوي على الأقل بنسبة $\left[1-\frac{1}{k^2}\right]$

k	1	2	3
$1-\frac{1}{k^2}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{9}$

$k=1$ فإن 0 من القياسات تقع على الأقل ضمن المجال $I=[\bar{x}-S, \bar{x}+S]$

$k=2$ فإن $\frac{3}{4}$ من القياسات تقع على الأقل ضمن المجال $I=[\bar{x}-2S, \bar{x}+2S]$

$k=3$ فإن $\frac{8}{9}$ من القياسات تقع على الأقل ضمن المجال $I=[\bar{x}-3S, \bar{x}+3S]$

برهان المتباينة:

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \Rightarrow (n-1)S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \quad (1)$$

نلاحظ من أجل $x_i \notin I$:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \geq \sum_{x_i \notin I}(x_i-\bar{x})^2 \quad (2)$$

توضيح $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{x_i\in I}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{x_i\notin I}(x_i-\bar{x})^2$

$I=[\bar{x}-kS, \bar{x}+kS]$

$x_i \notin I$ إما $\bar{x}+kS < x_i$ أو $\bar{x}-kS > x_i$ أي أن

$x_i-\bar{x} < -kS$ أو $x_i-\bar{x} > kS$

أي أن $(x_i-\bar{x})^2 > (kS)^2 \quad \dots \quad (3)$

إذا فرضنا أن عدد القياسات خارج I يساوي P

وبالتالي لدينا من (3):

$$\sum_{x_i \notin I} (x_i-\bar{X})^2 > P(kS)^2$$

ومن ② و ①

$$(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{X})^2 \geq \sum_{x_i \notin I} (x_i-\bar{X})^2 > P(kS)^2$$

أي أن $(n-1)S^2 > P k^2 . S^2$

وبالتالي: $P < \frac{n-1}{k^2} < \frac{n}{k^2}$

أي أن P أصغر من $\frac{1}{k^2} \times n$ أي أن P هو على الأكثر $\frac{n}{k^2}$

أي أن نسبة القياسات الواقعة خارج المجال I هي على الأكثر $\frac{1}{k^2}$ وبالتالي فإن نسبة داخل المجال I يوجد على الأقل ما نسبته $1-\frac{1}{k^2}$

مثال: اذا كان معدل رواتب الموظفين لدولة في احدى الشركات والبالغ عددهم 1827 موظفاً هو 3200 ل.س بانحراف معياري قدره 200 ل.س والمطلوب:

1- تعين المجال من الرواتب الذي تقع ضمنه على الأقل رواتب 624 موظفاً.

2- تعين المجال من الرواتب الذي تقع خارجه على الأكثر رواتب 406 موظفين.

الحل:

1) لدينا $n=1827$ $\bar{X}=3200$

$S=200$

حسب متباينة تشيبيتشف يقع ما نسبته $1-\frac{1}{k^2}$ على الأقل من رواتب الموظفين ضمن المجال

$I=[\bar{X}-kS, \bar{X}+kS]$ حيث $1<k$

أي:

$I=[3200-200k, 3200+200k]$

أي $k = ?$ لدينا

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{1624}{1827} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$I = \left[3200 - \frac{3}{\sqrt{2}} \times 200 , 3200 + \frac{3}{\sqrt{2}} \times 200\right]$$

$$= [2600 , 3800]$$

ج- اذا كان عدد الموظفين الذين رواتبهم خارج المجال المطلوب يساوي 406

فإن: $1827 - 406 = 1421$ ضمن المجال.

$$I = [\bar{X} - ks , \bar{X} + ks]$$

على الأقل وحسب متباينة تشيبشف:

$$I = [3200 - 200k , 3200 + 200k]$$

وبالتالي:

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{1421}{1827} = \frac{7}{9} \Rightarrow k = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

ومنه

$$I = 3200 - \frac{3}{\sqrt{2}} \times 200 , 3200 + \frac{3}{\sqrt{2}} \times 200$$

$$= [2775.74 , 3624.26] \simeq [2776 , 3625]$$

نتيجة: اذا القياسات داخل المجال $I = [\bar{X} - ks , \bar{X} + ks]$

هي على الأقل $1 - \frac{1}{k^2}$ فإن نسبة القياسات خارج

المجال I هي على الأكثر $\frac{1}{k^2}$

ط2:

$$\frac{1}{k^2} = \frac{406}{1827} = \frac{2}{9} \Rightarrow k = \frac{3}{\sqrt{2}}$$