المحاضرة الحادية عشرة ٢٠١٣/١١/٢٧

المتسلسلات المتناوبة والمختلطة:

* تعريف المتسلسلة المتناوبة.
* تعريف المتسلسلة المختلطة ((الكيفية)).
* تعريف التقارب المطلق.
* تعريف التقارب الشرطي.

مبرهنات:

A): اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ متقاربة $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة وتحقق أيضاً $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| < \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

B): ((معيار دالامبير)): اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ((مختلطة أو متناوبة)) وكانت $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$

1): اذا كانت $L < 1$ $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة بإطلاق.

2): " " $L > 1$ $\Leftarrow$ $\sum a_n$ متباعدة.

C): ((معيار الجذر لكوشي)): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ((مختلطة أو متناوبة)) وكانت $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = P$

1): $P < 1$ $\Leftarrow$ $\sum a_n$ متقاربة بإطلاق

2): $P > 1$ $\Leftarrow$ $\sum a_n$ متباعدة.

/ /

② : معيار لايبنتز «ليبنتز»: «يستخدم للمتسلسلات المتناوبة».
اذا كانت المتسلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ تحقق الشروط:

1): $a_n \geq 0$

2): $\{a_n\}_{n \in N}$ متناقصة $a_1 \geq a_2 \geq a_3, \dots$

3): $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ متقاربة
«ولكن ضمن الشروط».

تعريف:

★- نقول عن متسلسلة أنها متناوبة اذا كان كل حدين متجاورين فيها من إشارتين مختلفتين:

مثال:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$

★- نقول عن متسلسلة أنها مختلطة اذا كانت جزء من حدودها من إشارة موجبة والجزء الآخر سالب:

مثال: - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \Longrightarrow$ من $0 \to \pi$ موجب
ومن $\pi \to 2\pi$ سالب

★- نقول عن متسلسلة متناوبة أو مختلطة أنها متقاربة بإطلاق اذا كانت متسلسلة القيم المطلقة لحدودها متقاربة.

مثال: $\sum a_n$ متناوبة (أو مختلطة)، إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متقاربة
فإن $\sum a_n$ متقاربة بإطلاق.

مثال: ادرس تقارب وتباعد المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

وهي هندسية متقاربة لأن $r = \frac{1}{2} < 1$ وبالتالي فإنها متقاربة.

★- نقول عن متسلسلة متناوبة «أو متذبذبة» أنها متقاربة شرطياً
اذا كانت متسلسلة القيمة بالمطلقة لها متباعدة و لكنها متقاربة
و لكن ضمن شروط

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$

ومتسلسلة القيمة بالمطلقة لها:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow$$ متباعدة

مبرهنة ①: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$

$\{a_n\}_{n \in N}$ متناقصة ضمن شروط

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$$

$$S_n = \begin{cases} S_{2n} \xrightarrow{\text{نهايتها}} S \\ S_{2n+1} \xrightarrow{\text{نهايتها}} S \end{cases}$$

والنهاية وحيدة وتساوي S

«ملاحظة»: لإثبات أن متتالية متقاربة هنالك خاصية تقول أنه اذا كانت المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة»..

نأخذ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ ذات الحدود الزوجية

$\{S_{2n}\}_{n \in N}$

$$S_{2n} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{A_1} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{A_2} + \dots + \underbrace{(a_{2n-3} - a_{2n-2})}_{A_{n-1}} + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{A_n}$$

$= A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} + A_n$

موجب موجب موجب موجب

②: وهو موجب لأن $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \dots \Longleftarrow \{S_{2n}\}$ متتالية متزايدة

«بسبب تناقص $\{a_n\}$»

$$S_{2n} = a_1 - \left[(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \dots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}\right]$$

بسبب تناقص $\{a_n\}$ وبالتالي فإن $S_{2n} \leq a_1$

/ /

ع: $n \in N$ ، $\{S_{2n}\}$ محدودة من الأعلى.
ومن ١ و ٣ : فإن المتسلسلة متزايدة ومحدودة من الأعلى
فهي متقاربة من S.

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$$

$$= S + 0$$

لأنه حسب الخاصية الثالثة ((لايبنتز)).
وبالتالي النهاية وحيدة وهي متقاربة.

مثال: ادرس نوع التقارب في المتسلسلات التالية:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} \Rightarrow$

الحل:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\right| \Rightarrow \left|\frac{\sin n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\right| < \frac{1}{n^{3/2}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ الحافية متقاربة $P = \frac{3}{2} > 1$

$\Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\right|$ متقاربة حسب معيار المقارنة $\Leftarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ متقاربة بإطلاق.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ لأن $\cos\pi \Leftarrow n=1 = (-1)$.
$\cos 2\pi \Leftarrow n=2 = (1)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}}\right|$ متباعدة لأنها الحافية حيث $P = \frac{1}{2} < 1$

/ /

وبالتالي لنأخذ $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n\in N}$ متتالية

$$1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \dots$$

نلاحظ أن هذه المتتالية متناقصة.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

وبالتالي فهي تحقق شروط لايبنتز والمتسلسلة متقاربة شرطياً.

3]: $$\lim \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 & ; \quad n \text{ زوجي} \\ \lim_{n\to\infty} - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = -1 & \quad n \text{ فردي} \end{cases}$$

وبالتالي فهي متباعدة حسب المعيار الصفري.

4]. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \longrightarrow a_n$$

لأخذنا المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in N} > 0$

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$$

ونلاحظ أن هذه المتتالية متناقصة.

ونهائية

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

وبالتالي فهي تحقق شروط لايبنتز

والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ متقاربة حسب شروط لايبنتز.

انتهت المحاضرة.