دراسة المتجهات العشوائية

دراسة الشعاع العشوائي المنفصل في $\mathbb{R}^2$:

ليكن $Z=(X,Y)$ شعاعاً عشوائياً في $\mathbb{R}^2$ منفصلاً (متقطعاً) قيمه (x_i, y_j) حيث $i, j = 1, 2, \ldots$ ونكتب :

$$h(x_i, y_j) = P[X = x_i,\ Y = y_j] \quad , \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

وهذه الأخيرة تمثل دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ (X,Y) ونرمز لها بـ $h(x,y)$ ، وإذا كانت $f(x_i)$ و $f(y_j)$ تدل على كثافة X وكثافة Y على الترتيب حيث : $f(x_i) = P[X = x_i]$ و $f(y_j) = P[Y = y_j]$

لـ $h(x_i, y_j)$ يمكننا معرفة $f(x_i)$ و $f(y_j)$ حيث نحصل عليها بجدول :

$$f(x_i) = \sum_j h(x_i, y_j) \quad \text{أو} \quad f(x) = \sum_y h(x,y)$$

$$f(y_j) = \sum_i h(x_i, y_j) \quad \text{أو} \quad f(y) = \sum_x h(x,y)$$

حيث تسمى $h(x,y)$ بدالة الكثافة الاحتمالية المشتركة
و $f(x)$ و $f(y)$ بالكثافات الهامشية لـ X و لـ Y.
يمكننا وصف الكثافة المشتركة والكثافات الهامشية للشعاع المتقطع (X,Y) بالشكل:

$Y \backslash X$	x_1	$x_2 \ldots$	$x_i \ldots$	$f(y_j)$
y_1	$h(x_1,y_1)$	$h(x_2,y_1) \ldots$	$h(x_i,y_1) \ldots$	$f(y_1)$
y_2	$h(x_1,y_2)$	$h(x_2,y_2) \ldots$	$h(x_i,y_2) \ldots$	$f(y_2)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_j	$h(x_1,y_j)$	$h(x_2,y_j) \ldots$	$h(x_i,y_j) \ldots$	$f(y_j)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2) \ldots$	$f(x_i) \ldots$	1

وإن دالة الكثافة المشتركة كما هو واضح تحقق الشروط التالية:

1) $\forall x \in R_X , y \in R_Y : 1 \geq h(x,y) \geq 0$

2) $\sum_{x} \sum_{y} h(x,y) = 1$

3) $P[(X,Y) \in A] = \sum\sum_{(x,y) \in A} h(x,y)$; (حيث A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$)

• الكثافة الشرطية: ليكن $Z = (X,Y)$ شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة: $h(x,y) = P[X = x , Y = y]$ ولتكن $f(x)$ ، $f(y)$ الكثافات الهامشية لـ X و لـ Y على الترتيب،

نعرّف الكثافة الشرطية لـ Y مشروطاً بـ X بـ:

$$f_{Y/X}(y/x) = P[Y = y / X = x] = \frac{P[X = x , Y = y]}{P[X = x]} = \frac{h(x,y)}{f(x)}$$

وكذلك نعرّف الكثافة الشرطية لـ X مشروطاً بـ Y بالشكل:

$$f_{X/Y}(x/y) = P[X = x / Y = y] = \frac{P[X = x , Y = y]}{P[Y = y]} = \frac{h(x,y)}{f(y)}$$

وإذا كان:

$$\forall x \in R_X : \frac{h(x,y)}{f(x)} = f(y) \Leftrightarrow P[Y = y / X = x] = P[Y = y]$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in R_X : h(x,y) = f(x) . f(y)$$

فإننا نقول عن المتغيرين X , Y إنهما مستقلان عشوائياً.

مثال: ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً له الكثافة الاحتمالية المشتركة التالية:

$$f(x,y)=\frac{x+y}{21} \quad , \quad x=1,2,3;\ y=1,2$$

• المطلوب:

عين الكثافات الهامشية لـ X و لـ Y.

الحل:

$$f(x)=\sum_{y} f(x,y)=\sum_{y=1}^{2}\frac{x+y}{21}=\frac{x+1}{21}+\frac{x+2}{21}=\frac{2x+3}{21} \ ; \ x=1,2,3$$

$$f(y)=\sum_{x} f(x,y)=\sum_{x=1}^{3}\frac{x+y}{21}$$

$$=\frac{1+y}{21}+\frac{2+y}{21}+\frac{3+y}{21}=\frac{6+3y}{21}=\frac{2+y}{7} \ ; \ y=1,2$$

نلاحظ أن:

$$\sum_{x} f(x)=\sum_{x=1}^{3}\frac{2x+3}{21}=1 \ \text{ et } \ \sum_{y} f(y)=\sum_{y=1}^{2}\frac{2+y}{7}=1$$

أي تحققان خواص الكثافة الاحتمالية.

ملاحظة: يوجد طريقة ثانية للحل باستخدام الجداول كالتالي:

لدينا جدول الكثافة الاحتمالية المشتركة التالي الذي وبالاستعانة به نستخلص جداول الكثافة الهامشية لكل من المتغيرين X و Y:

Y \ X	1	2	3	$f(y)$
1	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{9}{21}$
2	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{12}{21}$
$f(x)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{9}{21}$	1

ومنه

جدول الكثافة الهامشية لـ X هو :

X	1	2	3	المجموع
$f(x)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{9}{21}$	1

نلاحظ من الجدول أن :

1) $f(x_i) \geq 0 \quad \forall i = 1,2,3$

2) $\sum_{x} f(x) = 1$

وبالتالي الجدول السابق يمثل قانون توزيع احتمالي لـ X .

وبالمثل نجد أن :

جدول الكثافة الهامشية لـ Y هو :

Y	1	2	المجموع
$f(y)$	$\frac{9}{21}$	$\frac{12}{21}$	1

أيضاً بملاحظة الجدول نجد أن :

1) $f(y_i) \geq 0 \quad \forall i = 1,2$

2) $\sum_{y} f(y) = 1$

وبالتالي الجدول السابق يمثل قانون توزيع احتمالي لـ Y .

مثال : لتكن $f(x,y)$ الكثافة الاحتمالية المشتركة للشعاع العشوائي (X,Y) :

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{30} \; ; \; x = 1,2,3 \; ; \; y = 1,2 .$$

عين الكثافات الهامشية لكل من X , Y و الكثافات المشتركة وماذا تستنتج ؟؟

الحل : الكثافة الهامشية لـ X :

$$f(x) = \sum_{y} f(x,y) = \sum_{y=1}^{2} \frac{xy^2}{30} = \frac{x}{30} + \frac{4x}{30} = \frac{5x}{30} = \frac{x}{6} \; ; \; x = 1,2,3$$

$$f(y) = \sum_{x} f(x,y) = \sum_{x=1}^{3} \frac{xy^2}{30} = \frac{y^2}{30} + \frac{2y^2}{30} + \frac{3y^2}{30} = \frac{6y^2}{30}$$

$$= \frac{y^2}{5} \ ; \ y = 1,2$$ (الكثافة الهامشية لـ Y)

والدالة الكثافة الشرطية لـ X مشروطاً بـ Y هي:

$$h_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{xy^2}{30} \cdot \frac{30}{6y^2} = \frac{x}{6}$$

والكثافة الشرطية لـ Y مشروطاً بـ X هي:

$$h_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{xy^2}{30} \cdot \frac{30}{5x} = \frac{y^2}{5}$$

ملاحظات:

$$\frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{x}{6} = f(x)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$$

$\Leftarrow$ (X, Y مستقلان عشوائياً)

التوزيعات المشتركة للمتغيرات العشوائية وخاصية الاستقلال:

تعريف: إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين فإن دالة التوزيع الاحتمالي المشترك لهما تعرف بـ:

$$F(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y] \ ; x, y \in \mathbb{R}.$$

فائدة دالة التوزيع المشتركة وخواصها:

1) يسمح بحساب احتمالات من الشكل:

$$P[a < X \leq b, c < Y \leq d] = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$$

2) من أجل دالة الكثافة المشتركة لـ X, Y يكون:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du$$

3) ومنه بسهولة يمكننا حساب الاحتمال في الخاصية (1):

$$P[a\le X\le b,\ c\le Y\le d]=\int_{d}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)\,dx\,dy$$

4) يمكننا استنتاج التوزيعات الهامشية من دالة التوزيع المشتركة:

$$F(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)\,dy\right]du$$

$$F(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)\,dx\right]dv$$

وبالاشتقاق نجد أن:

$$f(x)=F'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$f(y)=F'(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

5) نجد أن:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

$$\Rightarrow f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}$$

6) $F(x,y)=F(x).F(y) \Leftrightarrow$ ((X,Y) مستقلان عشوائياً)

$\boxed{\text{مبرهنة}}$ ليكن (X,Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة $f(x,y)$ ودالة توزيعه المشتركة $F(x,y)$ والكثافات الهامشية $f(x)$، $f(y)$ ودوال التوزيع الهامشية $F(x)$ و $F(y)$ عندئذٍ الشرط اللازم والكافي ليكون X, Y مستقلين عشوائياً هو أن يكون:

$$f(x,y)=f(x).f(y)$$

الإثبات:

اعتماداً على الخاصية (6) يكفي أن نبرهن أنه:

$$f(x,y) = f(x).\,f(y) \Leftrightarrow F(x,y) = F(x).\,F(y)$$

وسنبرهن ذلك في حالة متغيرات مستمرة حيث برهان ذلك من أجل متغيرات منفصلة يكفي أن نستبدل ∫ بـ Σ.

لزوم الشرط:

نفترض أنه X,Y مستقلان عندئذٍ $F(x,y) = F(x).\,F(y)$

وبالتالي:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 [F(x).\,F(y)]}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}F(x).\,\frac{\partial}{\partial y}F(y)$$

$$= f(x).\,f(y)$$

كفاية الشرط:

نفترض أنه $f(x,y) = f(x).\,f(y)$ ومنه:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} [f(u).\,f(v)]\,du\,dv$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du\,.\int_{-\infty}^{y} f(v)\,dv$$

$$= F(x).\,F(y)$$

ملاحظة: نعتمد في حل المسائل على المبرهنة السابقة وذلك لإثبات الاستقلال ونلاحظ أنه في حال الاستقلال تكون الكثافة الشرطية لـ Y هي نفسها الكثافة الهامشية.

- دالة الكثافة للمتجه العشوائي المستمر:

يجب أن تحقق :

1) $f(x,y) \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

تعاميم:

تعميم (1): يمكن تعميم الكثافة الاحتمالية لمتغيرين عشوائيين إلى الكثافة المشتركة لـ n متغير عشوائي حيث تعرّف بالشكل:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n]$$

ويمكن استنتاج الكثافات الهامشية بالأسلوب نفسه الذي رأيناه من أجل متغيرين عشوائيين :

$$f_{X_k}(x_k) = \sum_{x_1} \ldots \sum_{x_{k-1}} \sum_{x_{k+1}} \ldots \sum_{x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ و } x_k \in R_k$$

وتكون المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مستقلة عشوائياً إذا تحقق :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) . f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_n}(x_n)$$

و

$$x_1 \in R_{X_1}, x_2 \in R_{X_2}, \ldots, x_n \in R_{X_n}$$

ويمكن استنتاج الكثافة الهامشية لـ (X_j, X_k) بالشكل :

(حيث نجمع على الأدلة المخالفة)

$$f_{X_j, X_k}(x_j, x_k) = \sum_{x_1} \ldots \sum_{x_{j-1}} \sum_{x_{j+1}} \ldots \sum_{x_{k-1}} \sum_{x_{k+1}} \ldots \sum_{x_n} f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

تعميم (2) : إذا كان X شعاعاً عشوائياً في R^n فإننا نعرّف دالة توزيعه :

$$F_{(X_1, X_2, \ldots, X_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n]$$

ودالة كثافته الاحتمالية المشتركة تعرّف بـ :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$
$(x_1, x_2, \dots, x_n)$

ويكون بالتالي:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

والتوزيع الهامشي لـ X_i حيث $i = 1, 2, \dots, n$ يكون من الشكل:

$$F_{X_i}(x_i) = F(\infty, \infty, \dots, \infty, x_i, \infty, \dots, \infty)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x_i}\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

ونقول عن المتغيرات $X_1, X_2, \dots, X_n$ إنها مستقلة عشوائياً إذا كان:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1) . F(x_2) \dots F(x_n)$$

أو إذا كان:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) . f(x_2) \dots f(x_n)$$

مثال تعليمي: ليكن (X, Y) شعاعاً عشوائياً كثافته المشتركة معطاة بالشكل:

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy & ; \quad 0 < x < 4 ; 1 < y < 5 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

1) عين قيمة الثابت c حتى يكون $f(x,y)$ كثافة احتمالية فعلية

2) احسب $P[1 < X < 2, 2 < Y < 3]$

3) احسب $P[X \geq 3, Y \leq 2]$ — فيما لو لم يكن هناك مساواة هل يختلف الأمر

4) عين دوال التوزيع الهامشية $F(x)$ و $F(y)$.

5) عين دوال الكثافة الهامشية $f(x)$ و $f(y)$.

6) هل X, Y مستقلان عشوائياً ؟

7) احسب $P(X+Y<3)$ واحسب $P(X+Y>3)$

الحل : نلاحظ أنه:

1) $f(x,y) \geq 0$ وضوحاً

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Leftrightarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^4\int_1^5 cxy\,dy\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow c\int_0^4 x\left[\int_1^5 y\,dy\right]dx = 1 \Leftrightarrow c\int_0^4 x\left(\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^5\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{2}\int_0^4 x\,[25-1]\,dx = 1 \Leftrightarrow 12c\int_0^4 x\,dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$12c\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 1 \Leftrightarrow 12c\left[\frac{16}{2}-0\right] = 1 \Leftrightarrow$$

$$96c = 1 \Leftrightarrow \boxed{c = \frac{1}{96}}$$

وبالتالي تصبح دالة الكثافة المشتركة بالشكل :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{96}xy & ; \quad 0<x<4 ; 1<y<5 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

2) $P[1<X<2, 2<Y<3] = \int_1^2\int_2^3 \frac{1}{96}xy\,dy\,dx$

$$= \frac{1}{96}\int_1^2\left[\int_2^3 xy\,dy\right]dx = \frac{1}{96}\int_1^2\left[\frac{x}{2}y^2\right]_2^3 dx$$

$$= \frac{1}{192}\int_1^2 (9x-4x)\,dx = \frac{5}{192}\int_1^2 x\,dx$$

$$= \frac{5}{384}\left[x^2\right]_1^2 = \frac{15}{384}$$

3) $P[X \geq 3,\ Y \leq 2] = \int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{96} xy \, dy \, dx$

$$= \frac{1}{96}\int_3^4 \left[\int_1^2 xy \, dy\right] dx = \frac{1}{96}\int_3^4 \left[\frac{x}{2}y^2\right]_1^2 dx = \frac{1}{192}\int_3^4 \left[4x - x\right] dx$$

$$= \frac{3}{192}\int_3^4 x \, dx = \frac{3}{384}\left[x^2\right]_3^4 = \frac{3}{384}\left[16 - 9\right] = \frac{21}{384}$$

4) $F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y) \, dy \, du$

$$= \int_0^x \left[\int_1^5 \frac{1}{96} u \cdot y \, dy\right] du = \int_0^x \left[\frac{1}{96}\int_1^5 uy \, dy\right] du$$

$$= \int_0^x \left[\frac{1}{192}\left[uy^2\right]_1^5\right] du = \int_0^x \left[\frac{1}{192}\left[25u - u\right]\right] du$$

$$= \int_0^x \left[\frac{1}{192} 24u\right] du = \frac{24}{192}\int_0^x u \, du = \frac{24}{384}\left[u^2\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{16}x^2$$

$$\rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ \frac{1}{16}x^2 & ; \quad 0 \leq x < 4 \\ 1 & ; \quad x \geq 4 \end{cases}$$

سؤال | كيف نلاحظ أن
الأكثر من أنه قل
صحيح ؟؟؟

أو نستطيع أن نخرج :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v) \, dv \, du$$

تمثل أعلى قيمة لـ y

تمثل أدنى قيمة

تمثل أدنى قيمة لـ y

ونتابع بنفس الطريقة.

لإيجاد $F_Y(y)$ نتبع:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, dv\, du$$

$$= \int_{1}^{y} \left[\int_{0}^{4} f(u,v)\, du \right] dv$$

$$= \int_{1}^{y} \left[\int_{0}^{4} \frac{1}{96} u.v \, du \right] dv$$

$$= \int_{1}^{y} \left[\frac{1}{96} \int_{0}^{4} u.v\, du \right] dv = \int_{1}^{y} \left(\frac{1}{192} \left[v u^2 \right]_{0}^{4} \right) dv$$

$$= \int_{1}^{y} \left(\frac{1}{192} (16v) \right) dv = \frac{1}{12} \int_{1}^{y} v\, dv = \frac{1}{24} \left[v^2 \right]_{1}^{y}$$

$$= \frac{1}{24} \left[y^2 - 1 \right]$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ \frac{1}{24}\left[y^2 - 1\right] & ; \quad 1 \leq y < 5 \\ 1 & ; \quad y \geq 5 \end{cases}$$

5) $$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} x & ; \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{12} y & ; \quad 1 < y \leq 5 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

سؤال
كيف نضع
المتراجحات
من ناحية
ادخال المساواة
يوجد مشكلة في الكتاب
ص 26

6) $f(x,y) = \frac{1}{96} x y$

$f_X(x) = \frac{1}{8} x \quad , \quad f_Y(y) = \frac{1}{12} y$

$\Rightarrow f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{8} x \cdot \frac{1}{12} y = \frac{1}{96} x \cdot y = \frac{1}{96} x \cdot y = f(x,y)$

$\Leftarrow$ X , Y متغيران عشوائيان مستقلين

سؤال هل إذا وجدنا المساحة يختلف الحل

7) $P[X+Y<3] = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$

$D = \{(x,y) \; ; \; x+y<3\}$ حيث

$= \int_0^4 \int_0^{3-x} \left(\frac{1}{96} x y\right) dx\, dy$

$= \int_0^4 \left[\int_0^{3-x} \frac{1}{96} x y \, dy \right] dx = \int_0^4 \left[\frac{1}{96} \int_0^{3-x} x y \, dy \right] dx$

$= \int_0^4 \left[\frac{1}{192} \left[x y^2 \right]_0^{3-x} \right] dx$

$= \frac{1}{192} \int_0^4 x(3-x)\, dx = \frac{1}{192} \int_0^4 (3x - x^2)\, dx$

$= \frac{1}{192} \left[\frac{3}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{1}{192} \left[24 - \frac{64}{3} \right] = \frac{1}{576} [72 - 64]$

$= \frac{8}{576} = \frac{1}{72}$

$P[X+Y>3] = 1 - P[X+Y \leq 3]$ سؤال: هنا بحساب
فهل نحن مخطئون $P[X+Y<3]$
نفس الشيء

$= 1 - \frac{1}{72} = \frac{71}{72}$

طلب إضافي: احسب $P(1<X<2\ ,\ 2<Y<3)$

$$P(1<X<2\ ,\ 2<Y<3)=\int_1^2\int_2^3 f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_1^2\left[\int_2^3 \frac{x\cdot y}{96}\,dy\right]dx=\int_1^2\left[\frac{1}{96}\int_2^3 x\cdot y\,dy\right]dx$$

$$=\int_1^2\left[\frac{1}{192}\left[xy^2\right]_2^3\right]dx=\int_1^2\left[\frac{1}{192}(9x-4x)\right]dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{192}5x\right)dx=\frac{5}{192}\int_1^2 x\,dx=\frac{5}{384}\left[x^2\right]_1^2$$

$$=\frac{5}{384}(4-1)=\frac{15}{384}$$

طلب إضافي: أوجد الكثافة الشرطية لـ Y عند X والكثافة الشرطية لـ X عند Y .

$$h_{Y/X}(y/x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\frac{\frac{x\cdot y}{96}}{\frac{x}{8}}=\frac{y}{12}\ ;\ 1<y<5$$

$$h_{X/Y}(x/y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{\frac{x\cdot y}{96}}{\frac{y}{12}}=\frac{x}{8}\ ;\ 0<x<4$$

ملاحظة: بما أنه ظهر لدينا استقلال المتغيرين العشوائيين X,Y لاحظنا أنّ

$$h_{Y/X}(y/x)=f(y)$$

$$f_{X/Y}(x/y)=f(x)$$