المحاضرة الرابعة عشرة. ٥ / ١٢ / ٢٠١٣

* تعريف النهاية. * الدوال اللامتناهية في الصغر * الدوال اللامتناهية في الكبر * مكافئات اللامتناهيات في الصغر
* خواص النهايات * بعض النهايات الشهيرة * أمثلة وتدريبات

1: f معرفة في جوار a $\lim_{x\to a} f(x) = b$

2: $\forall \varepsilon>0 : \exists \delta_\varepsilon>0 : |x-a|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$

3: $\forall \{x_n\}_{n\in N} : \lim_{n\to\infty} x_n = a : x_n \subset X \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$

*: الدالة اللامتناهية في الصغر:

نقول عن الدالة f أنها لامتناهية في الصغر عندما $x \leftarrow a$ إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

مثال: $\lim_{x\to 0} x^n = 0$ $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$

مبرهنة: إذا كان $f(x)$ دالة لامتناهية في الصغر عند a وكانت g دالة محدودة عند a فإن $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0$

مثال:

$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$ ← دالة لامتناهية في الصغر.

حيث $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$

*: الدالة اللامتناهية في الكبر:

نقول عن دالة أنها لامتناهية في الكبر عندما $x \leftarrow a$ إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

*: مبرهنة: إذا كانت f دالة لامتناهية في الصغر عندما $x\to a$ فإن $\frac{1}{f}$ دالة لامتناهية في الكبر عندما $x\to a$
«وبالعكس».

/ /

تكافؤ اللامتناهيات في الصفر:

نقول عن الدالتين $\alpha(x), \beta(x)$ انهما متكافئتان في الصفر عندما $x \to a$

اذا كان نهاية: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \iff \underset{x \to a}{\alpha(x) \sim \beta(x)}$

$(*)$: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \iff \underset{x \to 0}{\sin x \sim x}$ | $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 \iff \underset{x \to 0}{\ln(1+x) \sim x}$

$(*)$: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1 \iff \underset{x \to 0}{\tan x \sim x}$ | $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1 \iff \underset{x \to 0}{e^x - 1 \sim x}$

$$\lim_{x \to \infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \iff \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1 \iff \underset{x \to \infty}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

إفادة:

$$(x+y)^n = x^n + \frac{n}{1!} x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} y^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3} y^3 + \cdots + \frac{n(n-1)+\cdots+(n(r-1))}{r!} x^{n-r} \cdot y^r + y^n$$

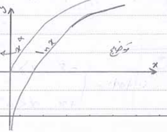
$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{r} x^{n-r} y^r + \cdots$$

$$\cdots + \binom{n}{n} y^n \Rightarrow \boxed{(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} \cdot y^r}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k \iff \underset{x \to 0}{(1+x)^k - 1 \sim kx} \quad (*)$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad : \alpha > 0$$

أقوى من $\ln x$



/ /

خواص النهايات للدوال: اذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = A$ ، $\lim_{x\to a} g(x) = B$ فإن

1): $\lim_{x\to a} \left(f(x) \mp g(x)\right) = A \mp B$

2): $\lim_{x\to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = A \cdot B$

3): $\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B}$ $: 0 \neq B$ $\quad g(x) \neq 0$

ادرس نهايات الدوال التالية وفق الجوار المشار اليه مبينا مع الرسم:

1): $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ $: x=2$

2): $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x>0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ $: x=0$

3): $f(x) = \begin{cases} x^2 & x<1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$ $\quad x=1$

4): $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & : x \geq 1 \\ x^2 & x<1 \end{cases}$ $\quad x=1$

5): $f(x) = \frac{|x|}{x}$ $: x=0$

أوجد النهاية:

1): $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ $\quad$ 2): $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x+1-1+1}{x-1}\right]^x = \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{2}{x-1}\right]^x$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x-1} \cdot \left(1+\frac{2}{x-1}\right)^1\right] = e^2 \cdot 1 = e^2$$

ط2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2$$

5): $f(x) = \frac{|x|}{x}$ $: x \neq 0$ $: R^*$ $\quad : |x| = \begin{cases} -x & x \geq 0 \\ +x & x<0 \end{cases}$

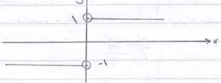
$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$$f(0+0) = \lim_{\substack{x>0 \\ x \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{x>0 \\ x \to 0}} 1 = 1$$

$$f(0-0) = \lim_{\substack{x<0 \\ x \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{x<0 \\ x \to 0}} -1 = -1$$

$\Rightarrow$ ليس للدالة نهاية عند $x \longrightarrow 0$

ويكون المستقر الفعلي للدالة $\{1,-1\}$ والمستقر الفعلي هو القيم التي يأخذها التابع على المحور yy'



انتهت المحاضرة.