القاعدة والمتدحرج.

تعريف

إنّ المركز الآني للدوران هو نقطة متغيرة بالمستوي الثابت ومتغيرة في المستوي المتحرك فهو يرسم منحنٍ C_1 [القاعدة] في المستوي الثابت ويرسم منحنٍ C [المتدحرج] في المستوي المتحرك

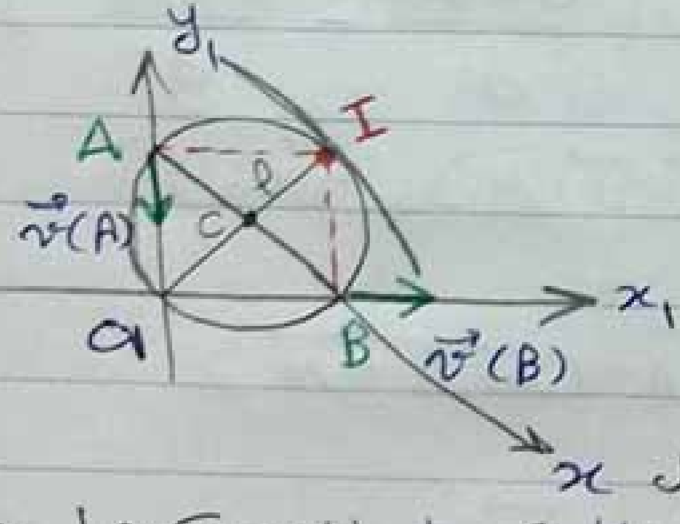
إنّ القاعدة هي: المحل الهندسي للمركز الآني للدوران في الجملة الثابتة والمتدحرج. هو المحل الهندسي للمركز الآني للدوران في الجملة المتحركة [المستوي المتحرك].

يشترك المنحنيان بنقطة واحدة في كل لحظة من الزمن وهي نقطة تماسهما.

إنّ سرعة I [المركز الآني للدوران] المتماسكة مع المستوي المتحرك بالنسبة للمستوي الثابت تكون معدومة.

فتتم الحركة المستوية بتدحرج منحنٍ متماسك مع المستوي المتحرك دون انزلاق على منحنٍ ثابت [القاعدة] في المستوي الثابت

كما أنّ سرعة انتقال I تكون متساوية سواء في الثابتة أو في الجملة المتماسكة وبالتالي فإنّ المسافة المقطوعة على القاعدة تساوي المسافة المقطوعة على المتدحرج



مثال:

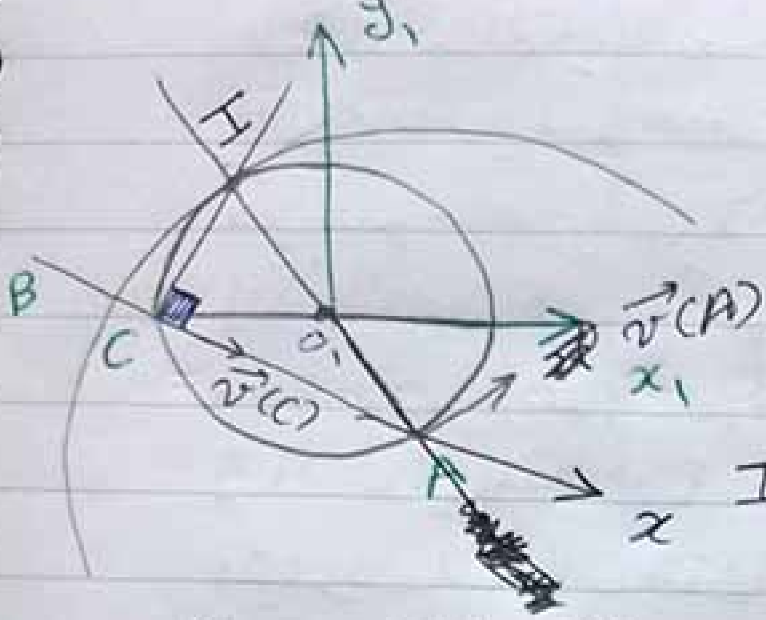
قضيب AB طوله $|AB| = 2l$
ينزلق طرفاه على مستقيمين متعامدين
عيّن القاعدة والمتدحرج هندسياً.

القاعدة: نصل بين I و O_1 فينتج مستطيل O_1AIB قطره AB و O_1I إذاً I تقع على محيط دائرة مركزها O_1 ونصف قطرها $2l$ فالقاعدة هي دائرة $C(O_1, 2l)$

أمّا المتدحرج نأخذ نقطة من المستقيم لبعدها عن I ثابت ولتكن C نقطة تقاطع القطرين [ثابتة بالنسبة للمتماسكة]
فالمتدحرج هنا عبارة عن دائرة مركزها C ونصف قطرها l

وإنّ تسارع انتقال على مماس الدائرتين متساوي.

تمرين: قضيب AB ينزلق طرفه A على نصف دائرة ويستند طرفه الآخر في نقطة C من محيطها



عين القاعدة والمتدحرج.

القاعدة هي الدائرة نفسها لأنّ الزاوية ICA هي زاوية قائمة تقابل قطر في دائرة أي I تقع على محيط دائرة قطرها IA [القطر المقابل للزاوية]

أمّا المتدحرج: لأنّ A تبعد عن I بعد ثابت فالمتدحرج هو دائرة مركزها A ونصف قطرها IA

التسارع:

$$\forall M \in S, \ \vec{v}(M) = \underbrace{\vec{v}(O)}_{\text{قطب الحركة}} + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

$$= \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \left[\frac{d\vec{O_1M}}{dt} - \frac{d\vec{O_1O}}{dt} \right]$$

$$= \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{v}(M) - \vec{v}(O) \right]$$

$$= \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \underbrace{\vec{\Gamma}(O)}_{\text{تسارع السحاب للقطب}} + \underbrace{\overbrace{\vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM}}^{\text{تسارع مماسي}} - \underbrace{\omega^2 \vec{OM}}_{\text{ناظمي}}}_{\text{دوران حول القطب}}$$

I مركز آني للدوران ⟶ $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{IM}$

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{IM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{IM}}{dt}$$

$$= \vec{\varepsilon} \wedge \vec{IM} + \vec{\omega} \wedge \left[\frac{d\vec{OM}}{dt} - \frac{d\vec{O_1I}}{dt} \right]$$

$$= \vec{\varepsilon} \wedge \vec{IM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M) - \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$ ⟵ سرعة انتقال I على القاعدة

$$= \vec{\varepsilon} \wedge \vec{IM} + \vec{\omega} (\vec{\omega} \wedge \vec{IM}) - \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{IM} - \omega^2 \vec{IM} - \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

التسارع هنا مش تسارع دوراني حيث يوجد حد مضاف $-\vec{\omega} \wedge \vec{u}$
لأن I غير ثابتة في المستوي الثابت

تعريف مركز التسارع المعدوم :
هو نقطة من الجسم المتحرك ينعدم تسارعها بالنسبة للجملة الثابتة
في اللحظة المعينة نرمز له ب Q

$$0 = \vec{\Gamma}(Q) = \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OQ} - \omega^2 \vec{OQ}$$

أما اذا كانت Q قطب للحركة فإن تسارع أي نقطة

$$\forall m \in S, \quad \vec{\Gamma}(M) = \underbrace{\vec{\Gamma}(Q)}_{0} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{QM} - \omega^2 \vec{QM}$$

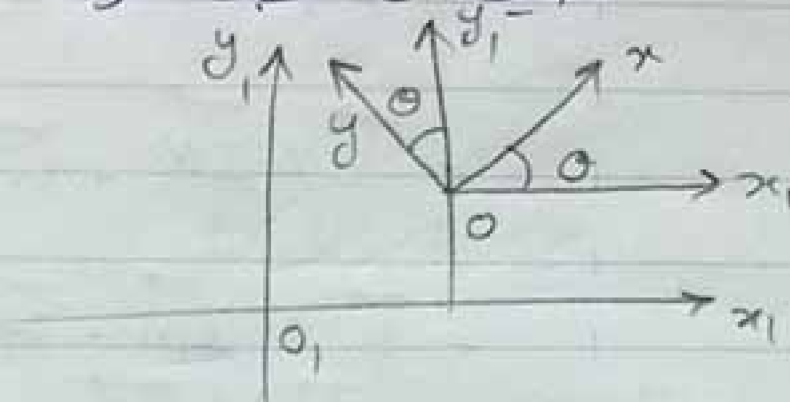
$$= \vec{\varepsilon} \wedge \vec{QM} - \omega^2 \vec{QM}$$

الدراسة التحليلية :

نختار معلمين $O_1x_1y_1$ ثابتة

والجملة oxy متماسكة مع الجسم

حيث O قطب الحركة $O(x_0, y_0)$



$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}$$

$$= x_0\vec{i_1} + y_0\vec{j_1} + x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{i} = \cos\theta\,\vec{i_1} + \sin\theta\,\vec{j_1}$$

$$\vec{j} = -\sin\theta\,\vec{i_1} + \cos\theta\,\vec{j_1}$$

$$= x_0\vec{i_1} + y_0\vec{j_1} + (x\cos\theta - y\sin\theta)\vec{i_1} + (x\sin\theta + y\cos\theta)\vec{j_1}$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= x_0 + x\cos\theta - y\sin\theta \\ y_1 &= y_0 + x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}\right\}$$ مركبات M على الثابتة

$$\vec{v}(M) = (\dot{x}_1, \dot{y}_1)$$

$$\vec{\Gamma}(M) = (\ddot{x}_1, \ddot{y}_1)$$

أما على $\boxed{\text{المتماسك}}$ لا يمكن الاشتقاق لإيجاد السرعة والتسارع لذلك نلجأ إلى القانون:

على الثابتة $\vec{v}(M) = \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

$$= (\dot{x}_0, \dot{y}_0) + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & 0 \end{vmatrix}$$

على المتماسكة $\vec{v}(M) = (v_x(o), v_y(o)) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix}$

$\vec{\Gamma}(M) = (x_0'', y_0'') + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & 0 \end{vmatrix} + \omega^2 (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$

على الثابتة

$\vec{\Gamma}(M) = (\Gamma_x(o), \Gamma_y(o)) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & 0 \end{vmatrix} - \omega^2 (x, y)$

على المتماسكة