/ /

المحاضرة 16 :

حساب التحولات :

بدء العمل بهذا الموضوع 1696 ، يهتم حساب التحولات : وما يسمى بالتغيرات بدراسة القيم العظمى والقيم الصغرى (القصوى) للداليات .

الدالي : هو تابع يكون فيه المتحول تابع آخر أو تابعاً لعدة توابع ولحساب التحولات دور أهاماً في الميكانيك أو الفيزياء أو الرياضيات .

- تعريف :

اذا كانت F مجموعة الدوال وكانت R مجموعة الأعداد الحقيقية فلنسمي $J: F \longrightarrow R$ بالدالي (functional) وللداليات صور (أشكال) مختلفة منها :

$$J[y(x)]=\int_a^b f(x,y(x),y'(x))\,dx$$

$$J[y(x)]=\int_a^b f(x,y(x),y''(x),\ldots\ldots y^{(n)}(x))\,dx$$

$$J[y(x)]=\int_a^b F[x,y_1,y_1',y_2,y_2',y_3,y_3',\ldots y_n,y_n']\,dx$$

وعلى سبيل المثال :

- فمثلاً طول القوس لمنحني $y=y(x)$ في مستوي الاحداثيات الديكارتية والذي يصل بين نقطتين $A(a_1,b_1)$ ، $B(a_2,b_2)$ بعلاقة معروفة في المرحلة الثانوية وهذا الطول عبارة عن دالي لأنه :

$$J=F \longrightarrow R$$

$$J[y(x)]=\int_{a_1}^{a_2}\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$

مثال (٢):

ان أقل مساحة سطحية S لسطح $z=z(x,y)$ ناتجة عن منحني مغلق تمثل دالي أيضاً لأن: $S: F \longrightarrow R$

$$S[z(x,y)] = \iint_B \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy$$

، حيث B هو مسقط السطح على المستوي xoy

مثال (٣) مسألة شهيرة:

- مسألة أقصر بعد بين نقطتين في المستوي فإذا افترضنا أن المستوي هو R^2 فتكون المسألة هي بإيجاد منحني $y=y(x)$ يصل بين نقطتين A و B في المستوي xoy ذو أقل طول ممكن وفي هذه الحالة يكون الدالي هو طول الخط $J[y(x)]$ الذي يجعل قيمة التكامل التالي (قيمة صغرى)

$$\int_{a_1}^{a_2} \sqrt{1+(y'(x))^2}\, dx$$

أما إذا كان المستوي هو R^3 فتكون المسألة هي إيجاد أقصر منحني يصل بين نقطتين A و B المنتميتان إلى R^3 والواقعتين على السطح $F(x,y,z)=0$ ، في هذه الحالة تكون المشكلة هي جعل التكامل التالي أقل ما يمكن:

$$\iint \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy$$

$$\int \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx$$

حيث $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $q=\frac{\partial z}{\partial y}$

ولقد طرحت هذه المسألة من قبل الرياضي السويسري يعقوب برنولي والذي عاش في الفترة ١٦٥٤ - ١٧٠٥

مثال (٤) مسألة ذات المحيط المعلوم

تتعلق هذه المسألة في إيجاد منحني مغلق ذو محيط معلوم تحد أكبر مساحة ممكنة وهذه المسألة تعد من أقدم مسائل حساب التغيرات والتي شغلت اهتمام الرياضيين، وفي هذه الحالة مثلاً خط طول المنحني

سيكون ثابت ويكون الدالي لهذه المسألة بالشكل :

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}\, dt$$

I أو J ← سيرمزلها

وهي تمثل معادلة دائرة .

- تعريف الدالي الخطي :

نقول عن الدالي $J : F \longrightarrow R$ أنه دالي خطي ، اذا تحقق الشرطان التاليان

(1) $J[Ky(x)] = K\, J[y(x)] \quad y \in F$

(2) $J[y_1(x) + y_2(x)] = J[y_1(x)] + J[y_2(x)]$.

Where $y_1, y_2 \in F \; , K \in R$

- تعريف :

نقول عن الدالي $J : F \longrightarrow R$ أنه مستمر عند النقطة $y = y_0(x)$ بلغة ع

اذا تحقق مايلي :

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \exists \delta > 0 : \|y - y_0\| < \delta \Longrightarrow |J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \varepsilon$$

- النظرية الأساسية في حساب التحولات :

(مبرهنة أولر - لاغرانج)

اذا كانت $\alpha(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a, b]$

وكان $\int_a^b \alpha(x) f(x) dx = 0$ حيث $f(x) \in \mathcal{L}$ لفضاء التوابع المستمرة

وكان $f(a) = f(b) = 0$

$$\Longrightarrow \alpha(x) = 0 \; , \forall x \in [a, b]$$

" تقبل دون برهان "

/ /

- مبرهنة (٢):

- اذا كانت $\alpha(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$

و كان: $\int_a^b \alpha(x)\, f'(x)\, dx = 0$ حيث $f(x) \in D_1 = D'$ (الدوال لها مشتق أول)

و كان: $f(a) = f(b) = 0$

$\Rightarrow \alpha(x) = C \;;\; C \in R \;,\; \forall x \in [a,b].$

"تقبل دون برهان"

- مبرهنة (٢):

- اذا كانت $\alpha(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$

و كان: $\int_a^b \alpha(x)\, f''(x)\, dx = 0$ حيث $f(x) \in D_2$

و كان: $f(a) = f(b) = 0$

و كان: $f'(a) = f'(b) = 0$

$\Rightarrow \alpha(x) = C_0 + C_1(x) \qquad C_0, C_1 \in R$

$\forall x \in [a,b]$ "تقبل دون برهان"

- مبرهنة (٤):

- اذا كانت $\alpha(x), \beta(x)$ دالتين مستمرتين على $[a,b]$

و كان: $\int_a^b [\alpha(x) f(x) + \beta(x) f'(x)]\, dx = 0 \;;\; f(x) \in D_1$

و كان: $f(a) = f(b) = 0$

$\Rightarrow$ $\beta(x)$ قابلة للاشتقاق , $\beta'(x) = \alpha(x)$ $\quad \forall x \in [a,b]$

- مبرهنة (٥): الشرط اللازم لأولر:

- اذا كان $J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$

و كان: $y(a) = A ,\; y(b) = B$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

/ /

إن الشرط اللازم لامتلاك الدالي قيمة قصوى هو تحقيق $y(x)$ للمعادلة التفاضلية:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0}$$

- وتسمى معادلة أولر لاغرانج أو اختصاراً معادلة أولر.
- الآن لنشتق هذه العلاقة: لنحسب الحد الثاني للمعادلة (1)
- المعادلة (1) تكتب بالشكل:

$$(F_{y'y'})\,y'' + (F_{y\cdot y'})\,y' + (F_{x\cdot y'}) - F_y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية

- ونسمي المنحنيات التكاملية: $y = y(x, c_1, c_2)$ بالمنحنيات الحرجة
- وبعضهم يسميهم منحنيات التوقف والتي قد تكون أحياناً منحنيات قصوى للدالي $J[y(x)]$
- مثال:
- أوجد المنحنيات التي قد يكون للدالي المعطى بالشكل:

$$J[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2)\,dx$$ قيماً قصوى

حيث $y(0) = 0$ و $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ ثم احسب هذه القيمة.

الحل: نحسب الحدود في المعادلة (1)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y''$$

نعوض في (1) نجد:

$$y'' + y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية عادية من الدرجة الثانية

حلها العام: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

نستفيد من الشروط:

$$\Rightarrow C_1 = 0 \ , \ C_2 = 1$$

$$\Rightarrow y(x) = \sin x$$

هو المنحني الذي توجد عليه القيمة القصوى للدالي المفروض وإيجادها.

$$J[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

وهو المطلوب.

مثال:

أوجد معادلة المنحني الواصل بين نقطتين $(0,0)$ و $(1,e)$ والذي تجعل الدالي:

$$J[y(x)] = \int_0^1 (y^2 + y'^2 + 2y e^x)\, dx$$

قيمة توقف.

الحل:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 2e^x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \ , \ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y''$$

نعوض في (1).

$$y'' - y = e^x$$

حلها: $y = y_c + y_p$

الحل العام $y'' - y = 0$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \mp 1$$

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

بتعويض $y(0)=0$ ، $y(1)=e$ نجد:

$$C_1 = \frac{e^2}{e^2-1} \quad , \quad C_2 = \frac{e^2}{1-e^2}$$

الحل الخاص $y_p = \frac{1}{D^2-1}(e^x)$

$$y_p = \frac{1}{2} x e^x$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$$

$$y = \frac{2e^2}{(e^2-1)}\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] + \frac{1}{2} x e^x$$

$$\boxed{y = \frac{e^2}{e^2-1} \operatorname{Sh} x + \frac{1}{2} x e^x}$$

هو المنحني الذي يجعل للدالي $J[y(x)]$ قيمة توقف

مثال: $J[y(x)] = \int_0^1 [y'^2 + 12xy]\, dx$

$y(2) = 8$,

$y(\pi) = \pi^3$

على أي منحني يمكن للدالي أن يحصل على قيمة قصوى.

الحل: $\frac{\partial F}{\partial y} = 12x$ ، $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'$ ، $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y''$

نعوض في (1):

$$12x - 2y'' = 0$$

$$\Rightarrow y'' = 6x$$

⟸ بالمكاملة مرتين نجد :

$$y' = 3x^2 + c_1$$

$$y = x^3 + c_1 x + c_2$$

وبتعويض $y(2) = 8$ ، $y(\pi) = \pi^3$ نجد :

$$c_1 = c_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x^3}$$

يمكن الحصول على القيم القصوى للمنحني من $y = x^3$

المحاضرة 17 :

- أوجد القيم القصوى للدالي :

$$J[y(x)] = \int_0^{\ln 2} [y'^2 e^{2x} + 3y^2 e^{2x}] \, dx$$

$$y(0) = 0, \quad y(\ln 2) = \frac{15}{8}$$

الحل :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6e^{2x} y \, , \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' e^{2x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 2y'' e^{2x} + 4y' e^{2x}$$

نعوض نجد :

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

معادلة تفاضلية متجانسة نوجد جذورها

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -3 , \quad \lambda = 1$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x}$$

نعوض من الشروط نجد :

$$c_1 = -1 \quad , \quad c_2 = 1$$

$$\Rightarrow y(x) = -e^{-3x} + e^{x}$$

مبرهنة

لتكن لدينا معادلة أولر لاغرانج ولتكن $y = y(x)$ دالة مشتقتها الأولى مستمرة

وإذا كانت المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة $F(x, y, y')$

بالنسبة لكل من x و y و y' مستمرة وكان $F_{y'y'} \neq 0$ فعندئذ المشتقة

الثانية $y''(x)$ موجودة ومستمرة عند كل النقاط x, y

" حالات خاصة "

لتكن لدينا $F = F(x, y, y')$

(1) الدالة F لا تحوي y' $\quad F = F(x, y)$

وبالتالي تصبح معادلة أولر بالشكل : $F_y(x, y) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

وحل هذه المعادلة الأخيرة لا يحوي أي ثوابت اختيارية

وبالتالي فإنه لا يحقق الشروط الحدية

$$y(a) = y_0$$

$$y(b) = y_1$$

ومن ثم لا يوجد حل لمسألة التغيرات هذه إلا عندما يمر المنحني

$F_y(x, y)$ بالنقاط الحدية (a, y_0) (b, y_1)

فيكون للدالة عندئذ قيم قصوى على ذلك المنحني

مثال: ليكن لدينا الدالي:

$$I[y(x)] = \int_a^b (x-y)^2 \, dx$$

الحل:

$$F = F(x,y) = (x-y)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2-2xy)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2x = 0 \Longrightarrow y - x = 0$$

$$\Longrightarrow y = x$$

وبالتالي نلاحظ أن $I[y(x)]=0$ على جميع النقاط للمستقيم $y=X$

(2) إذا كانت الدالة F خطية في y' عندئذ نكتب الدالة F بالشكل

$$F(x,y,y') = M(x,y) + N(x,y)\,y'$$

وعليه فإن الدالي F يكتب بالشكل:

$$J[y(x)] = \int_a^b [M(x,y) + N(x,y)\,y']\, dX$$

لكن نعلم أن معادلة اولر لاغرانج هي:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y}\,y' - \frac{dN}{dX} = 0}$$

$$dN = \frac{\partial N}{\partial x}\,dX + \frac{\partial N}{\partial y}\,dy$$

$$\frac{dN}{dX} = \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dN}{dX} = \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \cdot y'$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} y' - \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} y' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$\text{or} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

لا تمثل معادلة تفاضلية بل منحني لا يحقق بالشروط الحدية وبالتالي فإن مسألة التغيرات في هذه الحالة ليس لها حل في مجموعة الدوال المستمرة ومن جهة ثانية إذا كان الشرط $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ فإن المعادلة التفاضلية

$M\,dx + N\,dy = 0$ تكون تامة $\quad M = M(x,y)\ ,\ N = N(x,y)$

وعليه يكون الدالي:

$$J[y(x)] = \int_a^b [M(x,y) + N(x,y) \cdot y'] \, dx$$

$$= \int_a^b [M\,dx + N\,dy] \, dx$$

وهذا التكامل لا يعتمد على المسار، وتكون قيمة الدالي في هذه الحالة قيمة ثابتة على كل المنحنيات المسموح بها .. أي وبعبارة أخرى مسألة التغيرات هنا ليس لها معنى ولفهم الفكرة نطرح المثال الآتي:

مثال:

بفرض أن الدالي:

$$J[y(x)] = \int_0^1 [y^2 + x^2 y'] \, dx$$

$$y(0) = 0 \ \& \ y(1) = 9$$

من الشكل المعروض معادلة من الحالة الثانية :

$$M(x,y) = y^2 \quad , \quad N(x,y) = x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$2y - 2x = 0 \Rightarrow y - x = 0 \Rightarrow y = x$$

$y(0) = 0$ الشرط الحدي الأول محقق

$y(1) = a$ هذا لا يكون محقق إلا إذا كانت $a = 1$

ولكن إذا كانت $a \neq 1$ فإنه لا توجد منحنيات قصوى تحقق الشروط الحدية.

مثال (٢)

$$J[y(x)] = \int_a^b [y + xy'] \, dx$$

$$= \int_a^b d(x \cdot y) = by_1 - ay_0$$

$$y(0) = y_0 \quad , \quad y(b) = y_1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad \& \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 1 - 1 = 0$$

عليه فإن التكامل الذي هو

$y\,dx + x\,dy$ معادلة تفاضلية تامة أي أن التكامل لا يعتمد

على المسار الجبري بالذكر أن قيمته التي تعتمد فقط على نقطة البداية والنهاية

كما في المثال أعلاه ولا تعتمد على مسار التكامل أي المنحنى الذي

نكامل عليه فإن مسألة التغيرات ؛ والتحولات تصبح بدون معنى.

(٢) إذا كانت الدالة F تعتمد فقط على y' أي F من الشكل:

$$F = F(y')$$

وعندئذ بالتعويض في معادلة أولر نحصل على:

$$f_{y'y'} \cdot y'' = 0 \Rightarrow \begin{cases} y'' = 0 \\ f_{y'y'} = 0 \end{cases}$$ لأن جميع باقي الحدود أصفار

وفي الحالة الأولى إذا كانت $y''=0$ ⇐ بالمكاملة مرتين

$y = c_1 x + c_2$ وهي تمثل أسرة أو عائلة من المستقيمات ذات ثابتين

أما في الحالة الثانية $F_{y'y'} = 0$ بفرض أن لهذه المعادلة جذر حقيقي أو

أكثر $y' = k_i$ عندئذ يكون بالمكاملة:

$$y = k_i x + c$$

وهي أيضاً تمثل عائلة من المستقيمات بثابت واحد وهي محتواة في

العائلة السابقة ذات الثابتين وعليه فإن المنحنيات القصوى

للدالي تكون خطوطاً مستقيمة من الشكل: $y = c_1 x + c_2$ وعلى

سبيل المثال:

- أوجد أقصر منحنى يصل بين النقطتين:

$$(2,7) \; (-1,2)$$

الحل:

شكل التابعي:

$$J[y(x)] = \int_{-1}^{2} \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

وبالتالي:

$$F = F(y') = \sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

معادلة أويلر لاغرانج

~~Fy~~ بالمكاملة

$$F_{y'} = C$$

$$\Longrightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$

نوجد y' (بالحساب) $\Rightarrow y' = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} = M$ ميل

$$\Longrightarrow y = Mx + b$$

وبالاستفادة من الشروط الحدية نجد $M=3$ و $b=1 \Leftarrow$

$y = 3x + 1$ هو أقصر منحني.

---

(٤) إذا كانت الدالة F لا تحوي y $\quad F = F(x, y')$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}\left[F_{y'}\right] = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial F(x, y')}{\partial y'} = 0$$

$$\Longrightarrow F_{y'}(x, y') = c$$

وبالتالي يكون: $y' = f(x, c)$

وبالمكاملة:

$y = \int_0^x f(t, c)\,dt + c_1$ وهي تمثل معادلة منحنٍ يتوقف بالنسبة للدالي $J[y(x)]$

- مثال

لنفرض أنه لدينا الدالي :

$$J[y(x)] = \int_{+1}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2 y'^2}\, dx$$

وشروط الحدية :

$y(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$ ، $y(1) = 0$ ؛ أوجد معادلة منحني التوقف الذي

يكون للدالي $J[y(x)]$ حتماً محصول عليه .

الحل :

$$F_{y'} = \frac{x^2 y'}{\sqrt{1+x^2 y'^2}}$$

$$F_{y'} = c$$

بالمكاملة والحساب

$$\frac{x^2 y'}{\sqrt{1+x^2 y'^2}} = c \Rightarrow y' = \frac{c}{x\sqrt{x^2-c^2}}$$

بعزل y'

?

$$y + k = \cos^{-1}\left(\frac{c}{x}\right)$$

$$x\cos(y+k) = c$$

بالاستفادة من الشروط :

$$c = \frac{-\sqrt{3}}{2} \ , \ k = \frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x\cos\left(y + \frac{5\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

هي معادلة التوقف التي يكون للدالي $J[y(x)]$ حتماً محصول عليها.

مثال:

$$J[y(x)] = \int_1^2 \frac{1}{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$y(2) = 1 \;\&\; y(1) = 0$$

الحل:

$$F = f(x, y')$$

$$F_{y'} = c$$

$$F_{y'} = \frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = c$$

نحسب y' ونعزلها $\Rightarrow y' = \dfrac{cx}{\sqrt{1-c^2x^2}}$

نكامل $y = \int \_\_\_\_\_\_ \,dx + a$

$$\boxed{y = \frac{1}{c}\sqrt{1-c^2x^2} + a}$$

$$(y-a)^2 + x^2 = \frac{1}{c^2}$$

وهي أسرة دوائر مركزها على المحور y ولتعيين الثوابت من الشروط الحدية:

$$\Rightarrow a = 2 \;\&\; c = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$(y-2)^2 + x^2 = 5$$

وهي تمثل معادلة التوقف الذي قد يكون للدالي $J[y(x)]$ قيماً قصوى عليه.

/ /

المحاضرة 18 :

مثال :

ناقش وجود قيم قصوى للدالي :

$$I = \int_0^1 (x.y + y^2 - 2y^2 y')\, dx$$

علماً أن الشروط الحدية :

$$y(0) = 1 \ , \ y(1) = 2$$

الحل :

ان الدالي من الحالة (2) :

$$F(x,y,y') = M(x,y) + N(x,y)y'$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$M(x,y) = x.y + y^2$$

$$N(x,y) = -2y^2$$

نعوض : $\Rightarrow x + 2y - 0 = 0 \Rightarrow x = -2y \Rightarrow y = \frac{-x}{2}$

$$y(x) = -\frac{x}{2} \ , \ y(0) = 0 \neq 1 \longrightarrow$$

نلاحظ أن الشرط الحدي الأول غير محقق ⟸ لا يوجد قيم قصوى

حالة (5) $F = f(y, y')$ لا يحوي المتحول x

نعلم أن : $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - F_{y'y} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0 \quad \star$$

هذا من جهة ومن جهة ثانية :

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

نشتقها بالنسبة لـ x مستخدمين قاعدة السلسلة

$$= \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}\,y''}_{\alpha} - \underbrace{y''\frac{\partial f}{\partial y'}}_{\alpha} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}\,y'^2$$

$\frac{dy}{dx} \rightarrow y'$

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\,y'\,y''$$

منطلع y' عامل مشترك $\rightarrow$ $y'\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}\,y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\,y''\right)$

وهذا نفسه ★ : $\Rightarrow = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

بالمكاملة $\Rightarrow$ $\boxed{F - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{constant}}$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة لـ y' وإجراء عملية فصل المتغيرات وبعض التعويضات المناسبة نحصل على المنحني الذي قد يكون للدالي I منه قيماً قصوى .

★ مثال: أوجد معادلة المنحني المار بالنقطتين (a, A) و (b, B) والذي إذا دار حول محور السينات ولَّد سطحاً مساحته أصغر ما يمكن ?

الحل:

نريد تشكيل الدالي: إن مساحة السطح الدوراني المطلوب تعطى بالصيغة

$$S = 2\pi\int_a^b y\,d\sigma \quad ; \quad d\sigma^2 = dx^2 + dy^2$$

سيغما

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{dx^2+dy^2}\, dx = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

$\Rightarrow F(y, y')$ x لايوجد

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = c$$

$$f(y, y') = y\sqrt{1+y'^2}$$

$$\boxed{I = \int_a^b y \cdot \sqrt{1+y'^2}\, dx} \longrightarrow$$ الدالة

نهمل الثابت 2π

$$F - \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot y' = c$$

$$\Rightarrow y\sqrt{1+y'^2} - \frac{2y' y}{2\sqrt{1+y'^2}}\, y' = c$$

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{y' \cdot y}{\sqrt{1+y'^2}}\, y' = c$$

نوحد المقامات لنعزل y :

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = c \Rightarrow \boxed{y = c \cdot \sqrt{1+y'^2}}$$

$$y^2 = c^2(1+y'^2)$$

$$y'^2 = \frac{y^2 - c^2}{c^2} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2 - c^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{c^2}{y^2 - c^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1}}$$

نفرض $\frac{y}{c} = \cosh t = ch\, t$ ★

نحسب ال dy ونشتق :

$$\boxed{x = c \cdot \operatorname{arc} ch\left(\frac{y}{c}\right) + c_1} \longrightarrow$$ بالمكاملة والاصلاح

$$\frac{y}{c} = ch\, t = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2}$$

$$2e^{t} y = c e^{2t} + c \quad ; e^{t} = z$$

$$\boxed{c z^2 - 2 z y + c = 0}$$

نحل هذه المعادلة نجد :

$$z_1 = \frac{2y + 2\sqrt{y^2 - c^2}}{2c} > 0$$ مقبول .

$$z_1 = \frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c}$$

$$e^{t} = \frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c}$$

$$t = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - c^2}\right) - \ln c$$

وبالتالي يكون الحل بالعودة للعمليات السابقة والمفروض ب ★ نجد

$$\boxed{y = c \cdot ch\left(\frac{x - c_1}{c}\right)}$$

تمثل عائلة من المنحنيات لسلسلة ودورانها يعطي سطوحاً

يسمى كل سطح منها سطحاً سلسلياً أما الثابتان c_1, c_2 الموجودان

في العبارة الأخيرة فيعينان طبقاً للشروط الحدية والتي تتعلق بمواضع

النقاط المفروضة.

- النتيجة: المنحنيات القصوى هي سلسلات ومحاورها التناظرية

موازية للمحور oy .

- الداليات العديدة المتغيرات

$$J[y_1(x), y_2(x) \cdots y_n(x)] = \int_a^b F(x, y_1 \cdots y_n, y_1' \cdots y_n')\,d$$

الشروط الحدية:

$$y_i(a) = A_i \quad \& \quad y_i(b) = B_i$$

$$y_i(x) \in D_1 \longrightarrow$$ صف الدوال القابلة للاشتقاق مرة

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y_i'} \longrightarrow$$ دوال مستمرة على $[a,b]$

سنقبل دون برهان أن الشروط الضرورية لوجود منحنيات توقف

(صرجة) التي قد يكون للدالي J . حتماً قصوى عندها هي معطاة بالشكل:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) = 0} \quad (i = \overline{1:n})$$

- الأخيرة تمثل معادلات أولر-لاغرانج وهي شرط ضروري لوجود

منحنيات توقف للدالي J وهي تمثل n معادلة تفاضلية

من المرتبة الثانية

- حلها يعطينا أسرة أو عائلة من المنحنيات ذات $2n$ (من الثوابت)
في فضاء بعده $n+1$ والتي قد يكون للدالي J قيماً قصوى عندها.

* مثال:

أوجد المنحنيات التي قد يكون للدالي التالي قيماً قصوى عندها:

$$J[y(x), z(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 + z'^2 + 2yz)\,dx$$

$$y(0) = 0 \,,\quad z(0) = 0$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \,,\quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

الحل:

$$F = y'^2 + z'^2 + 2yz$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0$$

بالحل المشترك
$$\left\{\begin{array}{l} y'' - z = 0 \\ z'' - y = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow y'''' - y = 0 \Rightarrow \lambda^4 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \mp 1 \Rightarrow e^x, e^{-x}$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \mp i$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

$z = y''$ ⇐ لإيجاد z نشتق y السابقة مرتين

$$z = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x$$

وبالاستفادة من الشروط الحدية: نعوض ونجد:

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0 \quad , \quad c_4 = 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} y &= \sin x \\ z &= -\sin x \end{aligned}}$$ منحنيات التوقف للدالي المطلوبة.

مثال: أوجد منحني أقصر مسافة بين نقطتين

$(1,0,-1)$ ، $(0,1,0)$ في $\mathbb{R}^3$

وظيفة

مثال ٢:

أوجد منحني التوقف للدالي:

$$J[y(x), z(x)] = \int_a^b \left(-2y^2 + 2yz - y'^2 + z'^2\right) dx$$

$$y(b) = b_1 \ , \ y(a) = a_1$$

$$z(b) = b_2 \ , \ z(a) = a_2$$

الحل:

$$F = -2y^2 + 2yz - y'^2 + z'^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -4y + 2z \ , \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = -2y'$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = -2y''$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z'} = 2z' \quad , \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) = 2z''$$

نعوض بالمعادلات :

$$\begin{cases} -4y + 2z + 2y'' = 0 \\ 2y - 2z'' = 0 \end{cases}$$

$$2y = 2z'' \Rightarrow y = z''$$

$$-4z'' + 2z + 2z'''' = 0$$

$$z^{(4)} - 2z^{(2)} + z = 0$$

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 1) = 0$$

$(\lambda^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1$ جذر مضاعف

$\lambda = \mp 1$ كل جذر مكرر مرتين

$\Rightarrow$ الحل العام

$$z = (c_1 + c_2 x)e^{x} + (c_3 + c_4 x)e^{-x}$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت كيفية

$$y = z'' \Rightarrow$$

$$y = 2c_2 e^{x} + (c_1 + c_2 x)e^{x} - 2c_4 e^{-x} + (c_3 + c_4 x)e^{-x}$$

وبالاستفادة من الشروط الحدية نحصل على منحنيات التوقف

المحاضرة ١٩ :

مثال:

أوجد منحنيات التوقف للدالي :

$$J[y(x), z(x)] = \int_a^b F[y' + z']\,dx$$

الحل :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

لكن: $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ $\qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 1 \ , \ \frac{\partial F}{\partial z'} = 1$

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}}_{F_{y'}(y'+z')}\Big) = 0 \ , \ \frac{d}{dx}\Big(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial z'}}_{F_{z'}(y'+z')}\Big) = 0$$

باشتقاق :

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &\frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} y'' + \frac{\partial F_{y'}}{\partial z'} z'' = 0 \\ &\frac{\partial F_{z'}}{\partial z'} z'' + \frac{\partial F_{z'}}{\partial y'} y'' = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &F_{y'y'} \cdot y'' + F_{y'z'} \cdot z'' = 0 \\ &F_{y'z'} \cdot y'' + F_{z'z'} \cdot z'' = 0 \end{aligned}\right\} (1)$$

لكي الجملة (1) حل مشترك :

بالنسبة لـ y'' , z'' نجد :

/ /

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'z'} \\ F_{y'z'} & F_{z'z'} \end{vmatrix} = F_{y'y'} \cdot F_{z'z'} - F_{y'z'}^2$$

نفرض أن: $\Delta \neq 0$ وبالتالي يكون للجملة (1) الحل الصفري أي:

$$y'' = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 x + c_2$$

$$z'' = 0 \Rightarrow z(x) = c_3 x + c_4$$

حيث $c_i \; ; \; i = 1:4$ ثوابت اختيارية

- طريقة (2) لحل الجملة (1):

نضرب المعادلة الأولى في $F_{z'z'}$ والمعادلة الثانية في $F_{y'z'}$ ثم نطرح في

$$\left[F_{y'y'} \cdot F_{z'z'} - (F_{y'z'})^2 \right] \cdot y'' = 0$$

ونفرض أن: $F_{y'y'} \cdot F_{z'z'} - (F_{y'z'})^2 \neq 0$ يكون:

$$y'' = 0 \Rightarrow y = c_1 x + c_2$$

وبالمثل نجد أن: $z'' = 0$

$$\Rightarrow z = c_3 x + c_4$$

ومن ثم فإن $y(x), z(x)$ تمثل عائلة من الخطوط المستقيمة حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية يمكن تعيينها من الشروط الحدية ..

- الداليات التي تحتوي على مشتقات ذات مراتب عليا :

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)})\, dx$$

where: $y(x) \in D_n$

$$y(a) = A_0,\ y'(a) = A_1,\ y''(a) = A_2,\ y^{(n-1)}(a) = A_{n-1}$$

$$y(b) = B_0,\ y'(b) = B_1,\ y''(b) = B_2,\ y^{(n-1)}(b) = B_{n-1}$$

سنقبل دون برهان أن الشروط الضرورية لوجود منحني توقف والتي قد يكون للدالي $J[y(x)]$ عندها قيماً قصوى تحل بالمعادلة التفاضلية الآتية :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial y'''}\right) + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right) = 0$$

والأخيرة تمثل معادلة تفاضلية من الرتبة $2n$ تسمى معادلة "أويلر-بواسون" حلها العام يحتوي على $2n$ من الثوابت الاختيارية يمكن تعيينها باستخدام $2n$ من الشروط الحدية الموجودة في نص المسألة

<u>مثال</u>:

عالج مسألة ايجاد القيم القصوى:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} (y''^2 - 2y'^2 + y^2 - 2\sin x)\, dx$$

هنا الثوابت لا يمكن تعيينها لأنه لا يوجد شروط حدية

$$F = y''^2 - 2y'^2 + y^2 - 2\sin x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = -4y', \quad \frac{\partial F}{\partial y''} = 2y''$$

/ /

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = -4y'' \quad , \quad \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 2y''''$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0$$

$$2y + 4y'' + 2y'''' = 0$$

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0 \longrightarrow$$ معادلة تفاضلية خطية متجانسة ذات أمثال ثابتة

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda^2+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - i)^2(\lambda + i)^2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda = i$ مكرر مرتين

$\lambda = -i$ 〃 〃

$\Rightarrow$ الحل العام $y = (c_1 + c_3 x)\cos x + (c_2 + c_4 x)\sin x$

مثال(٣):

$$J[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2 - y^2 + x^2)\,dx$$

$$y(0) = 1 , y'(0) = 0 \quad , y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 , y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

أوجد منحنيات التوقف.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y , \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 , \quad \frac{\partial F}{\partial y''} = 2y''$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 2y''''$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0$$

$$-2y + 2y^{(4)} = 0$$
$$y^{(4)} - y = 0$$
$$\lambda^4 - 1 = 0$$
$$(\lambda^2-1)(\lambda^2+1) = 0 \implies \lambda = \mp 1 , \ \lambda = \mp i$$

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

$$y' = C_1 e^{x} - C_2 e^{-x} - C_3 \sin x + C_4 \cos x$$

بالتعويض بالشروط :

$$y(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 1$$
$$y'(0) = C_1 - C_2 + C_4 = 0$$
$$y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = C_1 e^{\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_4 = 0$$
$$y'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = C_1 e^{\frac{\pi}{2}} - C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - C_3 = -1$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1$$
$$C_1 - C_2 + C_4 = 0$$
$$C_1 e^{\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_4 = 0$$
$$C_1 e^{\frac{\pi}{2}} - C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - C_3 = -1$$

متجانسة والمحدد $\neq 0$ $\Leftarrow$ فهي تقبل الحل الصفري حل وحيد

بالحل المشترك نجد أن :

$$C_1 = C_2 = C_4 = 0 , \ C_3 = 1$$

$$\implies \boxed{y = \cos x}$$

إن القيم القصوى للدالي نحصل عليها من المنحني الذي معادلته

$$y = \cos x$$

مثال (٢) ابحث عن القيم القصوى للدالي :

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \left[y''^2 - 2y'^2 + y^2 - 2y \sin x \right] dx$$

الحل :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2\sin x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = -4y' \quad , \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = -4y''$$

$$\frac{\partial F}{\partial y''} = 2y'' \quad , \quad \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 2y''''$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0$$

$$2y - 2\sin x + 4y'' + 2y'''' = 0$$

$$\boxed{y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = \sin x}$$

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$$

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \Longrightarrow (\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda^2 = -1$$

مكرر مرتين $\lambda = \mp i$

الحل العام للمتجانسة $\Longrightarrow y = (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x$

الحل الخاص $y_p = \dfrac{1}{(D^2+1)^2} \sin x$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\frac{1}{(D^2+1)^2} e^{ix} = \frac{1}{(D^2+1)^2} \cos x + \frac{i}{(D^2+1)^2} \sin x$$

$$\Longrightarrow y_p = \frac{1}{(D^2+1)^2} \operatorname{Im}[e^{ix}]$$

$$= \operatorname{Im}\left[\frac{1}{(D^2+1)^2} e^{ix} \right]$$

$$= \operatorname{Im}\left[\frac{1}{(D+i)^2(D-i)^2} e^{ix} \right]$$

$$= \operatorname{Im}\left[\frac{-1}{4} \cdot \frac{x^2}{2!} e^{ix} \right] = -\frac{x^2}{8} \sin x$$

$$\xRightarrow{\text{الحل}} y = (c_1 + c_2 x)\cos x + \left(c_3 + c_4 x - \frac{x^2}{8}\right) \sin x$$

هو المطلوب

وظيفة:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \left[(y''')^2 + y^2 - 2y x^3 \right] dx$$

المحاضرة 20 :

مثال لوظيفية :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} [(y''')^2 + y^2 - 2yx^3] \, dx$$

عالج مسألة القيم القصوى للدالي :

الحل :

$$F = (y''')^2 + y^2 - 2yx^3$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2x^3 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y''} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'''} = 2y''' \quad , \quad \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial y'''}\right) = 2y^{(6)}$$

ومنه بالتعويض عن :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial y'''}\right) = 0$$

$$2y - 2x^3 - 2y^{(6)} = 0$$

$$\Rightarrow y^{(6)} - y = -x^3$$

وهي معادلة تفاضلية غير متجانسة لنوجد الحل العام لها :

أ- لنوجد الحل العام للمتجانسة :

$$y^{(6)} - y = 0 \Rightarrow \lambda^6 - 1 = 0$$

$\Rightarrow \lambda = (1)^{\frac{1}{6}} = 1^{\frac{1}{n}} \Rightarrow$ عدد الجذور $n = 6$

$$r = 1 \quad , \quad \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\lambda_k = r^{r}\left[\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right]$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$k=0 \Rightarrow \lambda_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$k=1 \Rightarrow \lambda_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$k=2 \Rightarrow \lambda_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$k=3 \Rightarrow \lambda_3 = -1$

$k=4 \Rightarrow \lambda_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$k=5 \Rightarrow \lambda_5 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه الحل العام للمتجانسة

$$y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}\left(c_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$+ c_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) + e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_5 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_6 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

ب) لنوجد الحل الخاص لغير المتجانسة :

$$y^{(6)} - y = -x^3 \qquad D = \frac{d}{dx}$$

$$(D^6 - 1)y = -x^3$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{D^6-1}(-x^3) = \frac{1}{1-D^{\cancel{5}\to 6}}x^3$$

$$= [1 + D^6 + \cdots]x^3 = x^3 = y_p \longrightarrow \text{الحل الخاص}$$

ومنه الحل هو :

$$y = y_c + y_p$$

/ /

- دراسة حالة جديدة للداليات من الشكل :

$$J[y(x),z(x)] = \int_a^b F(x,y,y',y'',y^{(n)},z,z',z'',\dots,z^{(n)})\,dx$$

where $y(x)$ & $z(x) \in D_n$

أ- نجعل $y(x)$ دالة متغيرة و $z(x)$ ثابتة

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \dots (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0 \quad \dots (1)$$

ب) نجعل $z(x)$ دالة متغيرة و $y(x)$ ثابتة

$$F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{z''} + \dots (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}F_{z^{(m)}} = 0 \quad \dots (2)$$

ومنه حصلنا على معادلتين تفاضليتين (1) و (2) وهي معادلات أويلر بواسون لنعمم هذه الحالة :

$$J[y_1(x),y_2(x),\dots y_m(x)] = \int_a^b F(x,y_1,y_1',y_1'',y_1^{n_1},y_2,y_2',y_2^{n_2},\dots y_m,y_m',y_m^{n_m})\,dx$$

where : $y_i(x) \in D_n$

إذا كانت إحدى هذه الدوال متغيرة ولتكن $y_i(x)$ مؤقتاً عندئذ الدوال الأخرى ثابتة ومن ثم يكون :

$$\frac{d}{dx}F_{y_i'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y_i''} + \dots (-1)^{n_i}\frac{d^{n_i}}{dx^n}F_{y_i^{n_i}} = 0$$

$$i = 1,\dots,m$$

مثال (١)

أوجد منحنيات التوقف للدالي :

$$J[y(x), z(x)] = \int_a^b [y''^2 + y' - y^2 + z''^2 + z'^2]\,dx$$

الحل :

$$F = y''^2 + y' - y^2 + z''^2 + z'^2$$

(أ) $y(x)$ دالة متغيرة و $z(x)$ ثابتة

$$F_y = -2y \;,\; F_{y'} = 1 \;,\; F_{y''} = 2y''$$

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \;,\; \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 2y''''$$

نعوض في معادلة أويلر بواسون

$$\Rightarrow -2y + 0 + 2y'''' = 0$$

$$y'''' - y = 0 \quad \ldots (1)$$

(ب) $y(x)$ ثابتة و $z(x)$ متغيرة.

$$F_z = 0 \;,\; F_{z'} = 2z' \;,\; F_{z''} = 2z''$$

$$\frac{d}{dx} F_{z'} = 2z'' \;,\; \frac{d^2}{dx^2} F_{z''} = 2z''''$$

$$\Rightarrow -2z'' + 2z'''' = 0$$

$$\Rightarrow z'''' - z'' = 0 \quad \ldots (2)$$

ومنه نحصل على

$$y'''' - y = 0 \quad \ldots (1)$$

$$z'''' - z'' = 0 \quad \ldots (2)$$

لحل (1) :

$$\lambda^4 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^4 = 1$$
$$\Rightarrow \lambda^2 = \mp 1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \mp 1 \\ \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda = \mp i \end{cases}$$
$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

لحل (2) :

$$\lambda^4 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2 - 1) = 0$$
$\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ جذر مضاعف
$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \mp 1$$
$$\Rightarrow z = c_1 + c_2 x + c_3 e^{x} + c_4 e^{-x}$$

- مسائل التغيرات بداليات ذات تكاملات متعددة .

سندرس في هذه الفقرة قيم التوقف أي النقاط الحرجة للداليات ذات التكاملات المضاعفة (المتعددة) فيما إذا كانت الداليات من الشكل

$$J[y(x), z(x)] = \iint_{\mathbb{R}} F(x, y, z, z_x, z_y)\, dx\, dy$$

حيث $z = z(x,y) \in L_2$ حيث l_2 مجموعة الدوال التي تكون مشتقاتها الجزئية الأولى والثانية مستمرة وموجودة في المنطقة المغلقة $\mathbb{R}$ علاوة على ذلك للدالة $z = z(x,y)$ قيم معروفة ومحددة على $\partial\mathbb{R}$ حيث $\partial\mathbb{R}$ هي محيط أو حدود $\mathbb{R}$. لتحديد شروط قيم التوقف نورد المبرهنة الهامة الآتية :

- المبرهنة الهامة الأساسية في حساب التكاملات الثنائية المغلق

- اذا كانت $f(x,y)$ دالة مستمرة في المنطقة المغلقة R وكان التكامل المضاعف = 0

$$\iint_{R} f(x,y) \cdot h(x,y)\, dx\, dy = 0$$

where $h(x,y) \in L_2$

$h(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \partial R$

$\Longrightarrow f(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \partial R$

- مبرهنة هامة :

اذا كانت الدالة $z = z(x,y)$ معرفة ومحدودة في ∂R وكان الدالي

$$J[y(x), z(x)] = \iint_{R} f(x, y, z, z_x, z_y)\, dx \cdot dy$$

$z = z(x,y)$ قيمة قصوى في الدالي

عندئذ f تحقق معادلة أويلر لاغرانج الآتية :

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0$$

تسمى المعادلة

(أوستروغرادسكي)

-- بدون اثبات --

مثال (1) :

أوجد معادلة أوستروغرادسكي للدالي :

$$M = \iint_{D} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy$$

$$u = u(x,y)$$

الحل :

$$f(x,y,u,u_x,u_y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = u_x^2 + u_y^2$$

$$F_u = 0 ,\ F_{u_x} = 2u_x ,\ F_{u_y} = 2u_y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} = 2u_x' ,\ \frac{\partial}{\partial x} F_{u_y} = 2u_y'$$

نعوض في معادلة أوستروغرادسكي :

$$-2u_x' - 2u_y' = 0$$

$$u_x' + u_y' = 0$$

أي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

تسمى معادلة لابلاس

مثال ٢ :

أكمل نفس السؤال السابق من أجل :

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

وظيفة

المحاضرة 21:

ص.ص.ص

حل الوظيفة:

$$I = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

$$F_{u_x} = \frac{2\frac{\partial u}{\partial x}}{2\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}$$

$$F_{u_y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}$$

$$\frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} - \frac{\partial u}{\partial x}\left[\frac{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}{2\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}\right]}{\left(1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)}$$

$$\frac{\partial F_{u_x}}{\partial x} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} - \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}{\left(1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\left(1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y^2}\right)^2\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}{\left(1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right.}{\left(1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_{ux}}{\partial x} = \frac{u_{xx} + (u_y)^2 u_{xx} - u_y \cdot u_x \cdot u_{xy}}{[1 + (u_x)^2 + (u_y)^2]^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_{ux}}{\partial x} = \frac{u_{xx}(1 + (u_y)^2) - u_x \cdot u_y \cdot u_{xy}}{[1 + (u_x)^2 + (u_y)^2]^{3/2}} \ *$$

$$\frac{\partial F_{uy}}{\partial y} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sqrt{1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2} - \left(\sqrt{1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2}\right)' \cdot \frac{\partial u}{\partial y}}{(1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2]}$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sqrt{1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2} - \left[\frac{2\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{2\sqrt{1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2}}\right]\frac{\partial u}{\partial y}}{(1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2)}$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\sqrt{(1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2)}} - \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (\frac{\partial u}{\partial y})^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{(1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot (\frac{\partial u}{\partial y})^2 - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (\frac{\partial u}{\partial y})^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{[1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2]^{3/2}}$$

$$\frac{\partial F_{uy}}{\partial y} = \frac{u_{yy} + u_{yy} \cdot (u_x)^2 - u_x \cdot u_y \cdot u_{xy}}{(1 + (u_x)^2 + (u_y)^2)^{3/2}} \ **$$

نطبق العلاقة : $F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{z_y} = 0$

$$-\left[\frac{u_{xx}(1+(u_y)^2) - u_x u_y . u_{xy}}{(1+(u_x)^2+(u_y)^2)^{3/2}}\right] - \left[\frac{u_{yy}(1+(u_x)^2) - u_x u_y . u_{xy}}{(1+(u_x)^2+(u_y)^2)^{3/2}}\right] = 0$$

الكسر $= 0 \Leftarrow$ البسط $= 0$

$$\Rightarrow u_{xx}(1+(u_y)^2) - u_x . u_y . u_{xy} + u_{yy}(1+(u_x)^2) - u_x . u_y . u_{xy} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{xx}(1+(u_y)^2) - 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy}(1+(u_x)^2) = 0}$$

- إيجاد السطح u_{xy} المتولد من منحني مغلق مساحته أقل ما يمكن.

المحاضرة ٢٢

د. ح. ح

- معادلة أولر لاغرانج القانونية (المتحولات القانونية):

ليكن لدينا الدالي:

الحالة العامة ①

$$J[y_1(x), y_2(x), y_3(x) ---- y_n(x)] = \int_a^b F(x, y_1, y_2, y_3, --- y_n, y'_1, y'_2, ---- y'_n)\, dx$$

and : $y_i(a) = A_i$, $y_i(b) = B_i$ الشروط الحدية

$i = 1, 2, 3, ----, n$; $(i = \overline{1,n})$

عندئذ فإننا نعلم أن معادلة أولر لاغرانج تكتب على الشكل:

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}(F_{y'_i}) = 0 \ ; (i = \overline{1,n})$$

حلها يمثل منحنيات التوقف أو ما يسمى بالمنحنيات الحرجة والتي قد يكون للدالي J قيمة قصوى عندها ولتسهيل حل تلك المعادلات بالتعبير عنها كنظام مكون من 2n من المعادلات التفاضلية ذات المرتبة الأولى دون التأثير على طبيعة المسائل المطروحة أو المشاكل التي تواجهنا نفرض أن:

$$P_i = \frac{\partial F}{\partial y'_i}$$

$$\boxed{P_i = F_{y'_i}} \star$$

$$i = 1 \Rightarrow P_1 = F_{y'_1} = \frac{\partial F}{\partial y'_1}$$

$$i = 2 \Rightarrow P_2 = F_{y'_2} = \frac{\partial F}{\partial y'_2}$$

نطلق على p_i بالمتحولات القانونية، أو نسميها بالمتغيرات المرافقة - للمتغيرات.
ولنفرض أن المعادلة التفاضلية قابلة للحل بالنسبة لـ y'_i
(أي عندما نحل المعادلة نعزل y'_i ونكامل نحصل على y).
أي يمكن التعبير عن y'_i بدلالة المتحول المستقل x و y_i و p_i ثم لنعرف
دالة جديدة يرمز لها بالرمز H . تسمى دالة هاملتون المرافقة
للتابع المفروض(١) وتكتب بالشكل التالي :

$$\boxed{\begin{aligned} &H(x, y_1, y_2, y_3, \dots y_n, p_1, p_2, \dots p_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i y'_i - F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots y'_n) \end{aligned}}$$

" دالة هاملتون "

إذن أدخلنا دالة جديدة H تكتب بدلالة المتحولات الجديدة p_i والذي يتوجب علينا تعيين المشتقات الجزئية وبإجراء الحسابات أي نحسب التفاضل الكلي : dH ودون الخوض بالتفاصيل نحصل على :

" معادلات أولر لاغرانج القانونية "

أولر لاغرانج القانونية

**

$$\boxed{\begin{aligned} y'_i &= H_{p_i} \qquad (i = \overline{1, n}) \\ -\frac{dp_i}{dx} &= H_{y_i} \qquad (i = \overline{1, n}) \end{aligned}}$$

$-p'_i$

$$-p'_i = H_{y_i} \quad \text{or} \quad p'_i = -H_{y_i}$$

/ /

إذن * نظام سيكون من $2n$ من المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى.

الأولى من ** عددها n

والثانية عددها n

ونطلق عليها اسم معادلات أويلر لاغرانج القانونية المصاحبة (المرافقة) للدالي J (1) ونحل هذه المعادلات التفاضلية باستخدام الجبر الخطي أو بغيرها من الطرق الأخرى لحصول على منحنيات التوقف للدالي J المعروض.

مثال:

ليكن لدينا الدالي التالي:

$$J[y(x)] = \int_a^b (y'^2 + y^2)\, dx$$

we have: $F = F(y, y') = y^2 + y'^2$

الحل: نكتب أولاً معادلة أويلر لاغرانج:

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y \,,\quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \,,\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y''$$

$$2y - 2y'' = 0 \Rightarrow y'' - y = 0$$ ثابتة

معادلة ت.ع متجانسة مرتبة ثانية ذات أمثال

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \mp 1$$

$$y(x) = A e^{x} + B e^{-x}$$

نحل الآن بالمتحولات القانونية: حسب الرمزي *

$$P = \frac{\partial F}{\partial y_1} = 2y' \Rightarrow y' = \frac{P}{2}$$

شكل دالة هاملتون :

$$H(x,y,p) = p y' - F(y,y')$$ حسب التعريف

$$= p y' - y'^2 - y^2$$

$$= p \cdot \frac{p}{2} - \frac{p^2}{4} - y^2$$

$$\Rightarrow H(x,y,p) = \frac{p^2}{4} - y^2$$

$$y' = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$p' = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

but : $y' = \frac{\partial H}{\partial p}$

$$\underbrace{-\frac{dp}{dx}}_{-p'} = \frac{\partial H}{\partial y} = -2y$$

$$\Rightarrow p' = \frac{dp}{dx} = 2y \quad , \quad p' = 2y$$

we have : $\boxed{\begin{matrix} p' = 2y \\ y' = \frac{p}{2} \end{matrix}}$ $\rightarrow$ جملة معادلات تفاضلية
كل معادلة من المرتبة الأولى

وحل هذه الجملة نستخدم المؤثر التفاضلي $D = \frac{d}{dx}$ وبالتالي
الجملة تكتب بالشكل :

$$D(p) - 2y = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

$$-\frac{p}{2} + D(y) = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

/ /

نضرب المعادلة الأولى بـ $\frac{1}{2}$ و المعادلة الثانية بـ D و نجمع المعادلتين فنحصل على:

$$(D^2-1)y=0 \quad \ldots\ldots (1)'$$

و بنفس الطريقة نحصل على:

$$(D^2-1)P=0 \quad \ldots\ldots (2)'$$

و يكون الحل المشترك هو:

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}$$
$$P=c_3e^{x}+c_4e^{-x}$$

لكن يوجد علاقة بين الثوابت c_1, c_2, c_3, c_4 (مرتبطة خطياً)

$$p' = 2y \Rightarrow y=\frac{p'}{2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{y(x)=\frac{1}{2}c_3e^{x}-\frac{1}{2}c_4e^{-x}}$$

و هي المنحنيات الحرجة المطلوبة، و بفرض أن:

$$\frac{1}{2}c_3=A \quad , \quad -\frac{1}{2}c_4=B \quad \text{نجد}$$

$$y(x)=Ae^{x}+Be^{-x}$$

حيث A ، B ثوابت تتعين من النقاط الحدية.

- طريقة ثانية: إن جملة المعادلتين التفاضليتين تكتب بالشكل ~~[illegible]~~ التالي:

$$Y'=AY \quad ; \quad Y=\begin{pmatrix}P\\ y\end{pmatrix} \quad , \quad A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}P'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P\\ y\end{pmatrix}$$

وكثير الحدود المميز للمصفوفة A والتي هي مصفوفة الأمثال هو:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

والقيم الذاتية للمصفوفة A كما نعلم هي عبارة عن جذور كثير الحدود المميز أي:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 , \lambda_2 = -1$$

لنوجد مجموعة الأشعة الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$ أي لنوجد $E_{\lambda_1 = 1}$ لكن نعلم أن الشعاع الذاتي يحققه:

$$A v = \lambda_1 v \quad ; \quad V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2v_2 = v_1 \\ \frac{1}{2} v_1 = v_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{عدد غير منته من الحلول}$$

$$\Rightarrow E_{\lambda_1} = \{(v_1 , v_2)\} = \{(2v_2 , v_2)\} = \{v_2(2,1)\}$$

وبالتالي نحصل على الشعاع الذاتي من المجموعة E_{λ_1} بإعطاء v_1 أو v_2 قيمة اختيارية مثلاً بإعطاء:

$$v_1 = 2 \Rightarrow v_2 = 1 \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وبنفس الطريقة توجد مجموعة الأشعة الذاتية المقابلة للقيمة الذاتية $\lambda_2 = -1$ ونحصل على الشعاع الذاتي.

/ /

$$V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

وعبا أن جذور كثير الحدود المميز حقيقية ومختلفة مثنى مثنى نجد أن
الحل العام للجملة هو:

$$\boxed{Y = c_1 V e^{\lambda_1 x} + c_2 V_2 e^{\lambda_2 x}}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} p \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

$$\boxed{\begin{aligned} p &= 2c_1 e^{x} + 2c_2 e^{-x} \\ y &= c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} \end{aligned}}$$

$$\Longrightarrow y(x) = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x}$$

وهي المنحنيات الحرجة المطلوبة استناداً إلى معادلات أولر لاغرانج
القانونية.

مثال: استناداً إلى معادلات أولر لاغرانج القانونية، أوجد
المنحنيات الحرجة للدالي الآتي:

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{(x^2+y^2)(1+y'^2)}\; dx$$

/ /

المحاضرة 23 :

م . م . م

حل المثال :

باستخدام معادلات أولر لاغرانج القانونية أوجد المنحنيات الحرجة

الدالي J الآتي :

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{(x^2+y^2)(1+y'^2)}\, dx$$

- الحل : المسألة معطاة بدون شروط حدية أي لا يمكن تعيين الثوابت

لدينا :

$$F = \sqrt{(x^2+y^2)(1+y'^2)}$$

لنحسب P المتغير المرافق للمتغير y ونعلم أنه يعطى بالشكل :

$$P = F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{(x^2+y^2)\cdot y'}{\sqrt{(x^2+y^2)(1+y'^2)}}$$

نقوم الآن بعزل y' بدلالة P , y , x من المعادلة الأخيرة نجد أن :

$$P\sqrt{(x^2+y^2)(1+y'^2)} = (x^2+y^2)y' \Rightarrow \text{نربع}$$

$$P^2(x^2+y^2)(1+y'^2) = (x^2+y^2)^2\, y'^2 \Rightarrow$$

$$P^2(1+y')^2 = (x^2+y^2).y'^2 \; ; (x^2+y^2) \neq 0$$

$$\Rightarrow P^2 + P^2 y'^2 = (x^2+y^2).y'^2$$

$$\Rightarrow P^2 = y'^2.(x^2+y^2-P^2) \Rightarrow$$

$$y'^2 = \frac{p^2}{x^2+y^2-p^2} \Longrightarrow$$ بجذر الطرفين

$$\boxed{y' = \frac{p}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}} \quad \ldots\ldots \bigstar$$

لنوجد الآن دالة هاملتون والتي كما نعلم معرفة بالشكل:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \, y'_i - F$$

$$\Longrightarrow H = p \cdot y' - \sqrt{(x^2+y^2)(1+y'^2)}$$

ولكن: $H = H(x, y, p)$

لنستفيد من $\bigstar$ في كتابة دالة هاملتون بدلالة x, y, p

$$H = p \cdot \left(\frac{p}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}\right) - \sqrt{(x^2+y^2)\left[1+\left(\frac{p}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{p^2}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}} - \sqrt{\frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2-p^2}}$$

$$\Longrightarrow H = \frac{p^2}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}} - \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}$$

$$= \frac{p^2-(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}} = -\sqrt{x^2+y^2-p^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{H = -\sqrt{x^2+y^2-p^2}} \longrightarrow$$ وهي دالة هاملتون

أما معادلات لاغرانج القانونية هي :

$$y' = H_p = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}$$

$$-\frac{dp}{dx} = H_y \Rightarrow p' = -H_y \Rightarrow p' = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

$$\Rightarrow p' = -\left[\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}\right] = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}$$

وبالتالي حصلنا على جملة معادلات تفاضلية غير خطية من مرتبة الثانية كل معادلة هي عبارة عن معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والأكثر من ذلك فهي محلولة بالنسبة لمشتقات التوابع :

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{p}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}} \\ p' &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

إن جملة المعادلات (1) تكتب بالشكل :

$$\boxed{\underset{(A)}{\sqrt{\frac{x^2+y^2-p^2}{p^2}}\, dy} = \underset{(B)}{\sqrt{\frac{x^2+y^2-p^2}{y^2}}\, dp} = \underset{(C)}{\frac{dx}{1}}}$$

والأخيرة هي أيضاً جملة معادلات تفاضلية مكتوبة بالصيغة التناظرية الموافقة للجملة (1)

لنأخذ النسبتين A و B نجد أن :

$$\cancel{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}\;\frac{dy}{p} = \cancel{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}\;\frac{dp}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{p} = \frac{dp}{y} \Rightarrow y\,dy = p\,dp$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{p^2}{2} + c_1 \Rightarrow$$

$$y^2 = p^2 + 2C_1 \quad \text{.....}\star\star$$

. الآن لنأخذ النسبتين A , C

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2-p^2}{p^2}}\;dy = dX$$

. بالاستفادة من $\star\star$ نجد :

$$\sqrt{\frac{x^2+p^2+2C-p^2}{y^2-2C_1}}\;dy = dX \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+2C_1}}{\sqrt{y^2-2C_1}}\;dy = dX$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى ومنفصلة المتحولات وبإصلاح المعادلة وبالمكاملة نجد :

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-2C_1}} = \frac{dX}{\sqrt{x^2+2C_1}} \xRightarrow{} \int_{\text{بالمكاملة}} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-2C_1}}}_{I_1} = \underbrace{\int \frac{dX}{\sqrt{x^2+2C_1}}}_{I_2} + C_2$$

$$\star \quad I_1 = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 2c_1}}$$

بإجراء تغيير في المتحول بالشكل :

$$y = \sqrt{2c_1}.\,ch\,t \Rightarrow t = arc\,ch \frac{y}{\sqrt{2c_1}}$$

$$\Rightarrow dy = \sqrt{2c_1}.\,sh\,t\,.\,dt$$

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{2c_1}\,.\,sh\,t}{\sqrt{2c_1}\,\sqrt{ch^2 t - 1}}\,dt = \int dt = t$$

$$\Rightarrow I_1 = arc.\,ch.\frac{y}{\sqrt{2c_1}}$$

$$\star \quad I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2c_1}}$$

بإجراء تغيير في المتحول من الشكل :

$$x = \sqrt{2c_1}\,.\,sh\,u \Rightarrow u = arc.\,sh\,\frac{x}{\sqrt{2c_1}}$$

$$dX = \sqrt{2c_1}\,.\,ch\,u\,du$$

$$\Rightarrow I_2 = \int \frac{\sqrt{2c_1}\,.\,ch\,u}{\sqrt{2c_1}\,.\sqrt{sh^2 u + 1}}\,du = \int du = u$$

$$\Rightarrow I_2 = arc\,sh\,\frac{x}{\sqrt{2c_1}}$$

بالعودة و التعويض نجد أن :

$$\text{arc ch}\,\frac{y}{\sqrt{2c_1}} = \text{arc sh}\,\frac{x}{\sqrt{2c_1}} + c_2$$

$$\Longrightarrow \frac{y}{\sqrt{2c_1}} = \text{ch}\left[\text{arc}\,.\,\text{sh}\,\frac{x}{\sqrt{2c_1}} + c_2\right]$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(x) = \sqrt{2c_1}\,.\,\text{ch}\left[\text{arc}\,.\,\text{sh}\,\frac{x}{\sqrt{2c_1}} + c_2\right]}$$

وحيث c_1, c_2 ثوابت كيفية ، الأخيرة عبارة عن المنحنيات الحرجة للدالي J ، بفرض: $\sqrt{2c_1} = A$ ، $c_2 = B$ نحصل على

$$y(x) = A\,\text{ch}\left[\text{arc sh}\,\frac{x}{A} + B\right]$$

"الداليات بشرط اضافية"

قد تتطلب بعض مسائل ما جعل التكامل ما نهاية قصوى ، الاحتفاظ بتكامل وشروط اضافية على نفس المتغيرات التي يتبع لها الدالي .

ليكن لدينا الدالي :

$$J[y] = \int_a^b f[x, y, y']\,dx \quad , y \in D_1$$

ولتكن لدينا الشروط الحدية :

$$y(a) = A \;,\; y(b) = B$$

وليكن لدينا الدالي :

$$K[y] = \int_a^b G[x, y, y']\,dx = L$$

حيث L ثابت

اذا كانت الدالة $y = y(x)$ قيمة قصوى للدالي J وليست قيمة قصوى للدالي K فإنه يوجد ثابت λ بحيث أن y قيمة قصوى للدالي S المعرف بالشكل :

$$S[y] = \int_a^b [F + \lambda G]\,dx$$

هذه الفقرة يأتي منها سؤال نظري
البحث في الداليات بشروط المتساوية
ثم تطبيقها على مسألة
ذات المحيط
المعلوم

تسمى λ مضاعف لاغرانج

وبالتالي لمعرفة القيم القصوى للدالي σ يكفي معرفة القيم القصوى للدالي S.

نعلم أن الشرط اللازم ليكون للدالي S قيم قصوى على المنحني y وهو تحقيقه y لمعادلة أولر - لاغرانج الآتية:

$$\frac{\partial}{\partial y}(F+\lambda G) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial y'}(F+\lambda G)\right] = 0$$

$$\Rightarrow F_y + \lambda G_y - \frac{d}{dx}\left[F_{y'} + \lambda G_{y'}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \lambda\left[G_y - \frac{d}{dx}G_{y'}\right] = 0}$$

الأخيرة هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ومنحنياتها تكاملاتها من الشكل: $y = y(x, c_1, c_2, \lambda)$

ولتحديد الثوابت نستفيد من الشروط الحدية المفروضة ونستفيد من الدالي k المعطى بالفرض.

مثال: مسألة ذات المحيط المعلوم.

من بين جميع المنحنيات الواقعة في الربع الأول والتي طول كل منها L وتمر بالنقطتين $(a,0)$ $(-a,0)$

أوجد ذلك المنحني الذي يكون مع الفترة $[-a,a]$ أكبر مساحة ممكنة.

الحل : لنأخذ

دالي المساحة $J[y] = \int_{-a}^{a} y \, dx$

$y(-a) = y(a) = 0$

من نص المسألة بعد تحويل لرموز رياضية

طول الخط $K[y] = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2} \, dx = L$

$$S[y] = J[y] + \lambda K[y]$$

$$F = y \ , \ G = \sqrt{1+y'^2}$$

$$S[y] = \int_{-a}^{a} \left(y + \lambda \sqrt{1+y'^2} \right) dx$$

المنحني y المطلوب يحقق معادلة أولر لاغرانج المعروفة :

$$F_1 = y + \lambda \sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 \ , \ \frac{\partial F_1}{\partial y'} = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

بالتعويض نجد :

$$1 - \frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{بالمكاملة}} x - \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

$$x - C_1 = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} \Rightarrow (x - C_1)^2 (1 + y'^2) = \lambda^2 . y'^2$$

$$\Rightarrow (x-c_1)^2 = y'^2 \left(\lambda^2 - (x-c_1)^2 \right)$$

$$\Rightarrow y'^2 = \frac{(x-c_1)^2}{\lambda^2 - (x-c_1)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{x-c_1}{\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2}}} \quad \ldots\ldots (\star)$$

$$y = \underbrace{\int \frac{x-c_1}{\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2}}\, dx}_{I} + c_2$$

لنجري نفرض المتحول من الشكل:

$$-(x-c_1)^2 = t \Rightarrow -2(x-c_1)\,dx = dt$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{\lambda^2+t}} = -\frac{1}{2}\int (\lambda^2+t)^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{(\lambda^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right] = -\sqrt{\lambda^2+t}$$

$$\Rightarrow I = -\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2}$$

وبالتالي :

$$y = -\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2} + c_2$$

$$y - c_2 = -\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2}$$

$$\Rightarrow (y-c_2)^2 = \lambda^2 - (x-c_1)^2$$

$$\Rightarrow (y-c_2)^2+(x-c_1)^2 = \lambda^2$$

وهي عبارة عن أسرة من الدوائر مراكزها (c_1, c_2) ونصف قطرها λ

$$y(-a) = 0 \Rightarrow c_2^2 + (a+c_1)^2 = \lambda^2$$

$$y(a) = 0 \Rightarrow c_2^2 + (a-c_1)^2 = \lambda^2$$

بإجراء عمليات .

$$(a-c_1)^2 - (a+c_1)^2 = 0$$

$$a^2 - 2ac_1 + c_1^2 - a^2 - c_1^2 - 2ac_1 = 0$$

$$-4ac_1 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 + c_2 = \lambda^2} \quad \ldots (1)$$

وبالاستفادة من الدالي k وبالاستفادة من ★ لمعرفة باقي الثوابت نجد

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1+\frac{x^2}{\lambda^2-x^2}}\, dx = L$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{-a}^{a} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}\, dx}_{I} = L$$

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}\, dx$$

نجري تغير في المتحول من الشكل:

$$x = \lambda \sin t \Rightarrow t = \arcsin \frac{x}{\lambda}$$

$$dx = \lambda \cos t \, dt$$

وحدود التكامل الجديد هي :

$$x_1 = a \Rightarrow t_1 = \arcsin -\frac{a}{\lambda}$$

$$x_2 = a \Rightarrow t_2 = \arcsin \frac{a}{\lambda}$$

$$\underline{\pi} = \int_{\arcsin \frac{-a}{\lambda}}^{\arcsin \frac{a}{\lambda}} \frac{\lambda^2 \cos t}{\sqrt{\lambda^2 - \lambda^2 \sin^2 t}} \, dt =$$

$$= \int_{-\arcsin \frac{a}{\lambda}}^{\arcsin \frac{a}{\lambda}} \lambda \, dt$$

$$\boxed{\text{II} = 2 \lambda \arcsin \frac{a}{\lambda}}$$

$$2 \lambda . \arcsin \frac{a}{\lambda} = L$$

$$\arcsin \frac{a}{\lambda} = \frac{L}{2\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\lambda} = \sin \frac{L}{2\lambda}$$

$$\boxed{a = \lambda \sin \frac{L}{2\lambda}} \quad \ldots\ldots (2)$$

Generated by CamScanner from intsig.com

بالعودة الى (1) نجد أن :

$$\lambda^2 \cdot \sin^2 \frac{L}{2\lambda} + C_2^2 = \lambda^2$$

$$C_2^2 = \lambda^2 \left(1 - \sin^2 \frac{L}{2\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = \lambda \cos \frac{L}{2\lambda}}$$

$$\boxed{x^2 + \left(y - \lambda \cos \frac{L}{2\lambda}\right)^2 = \lambda^2}$$

وهو المنحني المطلوب للقيمة القصوى للدالي S وحسب

الدراسة النظرية يكون منحني قيمة قصوى للدالي J .

/ /

المحاضرة 24 : ((الدالة حيزة))

د . س

مثال ٢:

أوجد منحني ليتوقف أو المنحني الحرج للدالي:

$$J[y] = \int_{-a}^{a} y\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

حيث:

$$y(-a) = y(a) = b \rightarrow \text{متناظر}$$

$$K[y] = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2}\, dx = 2L$$

الحل:

ع المسألة بشروط اضافية فنشكل الدالي $S[y]$

$$S[y] = J[y] + \lambda K[y]$$

$$F = y\sqrt{1+y'^2} \quad , \quad G = \sqrt{1+y'^2}$$

$$H = F + \lambda G = y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{H = (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}}$$

نطبق مبرهنة أولر لاغرانج

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H}{\partial y'}\right) = 0$$

ن. H تابع لـ (y, y') وهي من الحالة الخامسة

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(H - \frac{\partial H}{\partial y'} \cdot y'\right) = 0$$

$$\Rightarrow H - \frac{\partial H}{\partial y'} \cdot y' = C_1$$

/ /

$$\frac{\partial H}{\partial y'} = \frac{(y+\lambda)y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - \frac{(y+\lambda)y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

نوحد المقامات

$$\Rightarrow \frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1 \Rightarrow (y+\lambda)^2 = c_1^2(1+y'^2)$$

$$\Rightarrow y'^2 = \frac{(y+\lambda)^2 - c_1^2}{c_1^2} \Rightarrow$$ نجذر

$$\boxed{y' = \frac{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c_1^2}}{c_1}}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c_1^2}} = \frac{dx}{c_1} \Rightarrow \int \Rightarrow$$

$$\underbrace{\int \frac{dy}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c_1^2}}}_{I} = \frac{x}{c_1} + C_2$$

نفرض $y+\lambda = c\,ch\,t$

بالمكاملة

$$\Rightarrow \operatorname{arc\,ch}\left(\frac{y+\lambda}{c_1}\right) = \frac{x}{c_1} + C_2$$

$$\Rightarrow \boxed{y = c_1\,ch\left(\frac{x}{c_1} + C_2\right) - \lambda}$$

وكون المنحني $y = y(x)$ متناظر بالنسبة لمحور التراتيب نجد أن

$C_2 = 0$

$$y = c_1 \, ch\left(\frac{x}{c_1}\right) - \lambda \quad \dots\dots \; \star$$

$$y(a) = b \Rightarrow \boxed{b = c_1 \, . \, ch\left(\frac{a}{c_1}\right) - \lambda} \quad \dots \; ①$$

من $\star$ نجد :

ونعوض في K

$$y' = sh\left(\frac{x}{c_1}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^2} \, dx = 2L$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + sh^2\left(\frac{x}{c_1}\right)} \, dx = 2L$$

$$= \int_{-a}^{a} ch\left(\frac{x}{c_1}\right) dx = 2L$$

$$= 2\int_{0}^{a} ch\left(\frac{x}{c_1}\right) dx = 2L$$

$$= 2 c_1 \, sh\left(\frac{a}{c_1}\right) = 2L \Rightarrow$$

$$\boxed{sh\left(\frac{a}{c_1}\right) = \frac{L}{c_1}} \quad \dots\dots \; ②$$

من (1) نجد أن :

$$\frac{b + \lambda}{c_1} = ch\left(\frac{a}{c_1}\right)$$

ومن (2) :

$$\frac{L}{c_1} = sh\left(\frac{a}{c_1}\right)$$

/ /

نربع ونطرح نجد:

$$\left(\frac{b+\lambda}{c_1}\right)^2-\left(\frac{L}{c_1}\right)^2=1$$

$$(b+\lambda)^2=L^2+c_1^2$$

$$b+\lambda=\sqrt{L^2+c_1^2}$$

$$\boxed{\lambda=\sqrt{L^2+c_1^2}-b}$$

وبالتالي المنحني الحرج هو:

$$y=c_1 . ch\left(\frac{x}{c_1}\right)+b-\sqrt{L^2+c_1^2}$$

انتهى الحل

ملاحظة (1)

ت.ص إذا كان لدينا الدالي تابع لـ n متغير

$$J[y_1,y_2,\dots y_n]=\int_a^b f[x,y_1,\dots y_n,y'_1,\dots y'_n]\,dx$$

$$y_i\in D_1\ ,\ i=1:n$$

وحيث أن هذا الدالي مزود بالشروط:

$$y_i(a)=A_i\ ,\ y_i(b)=B_i$$

وكان:

$$K_j[y_1,y_2,\dots y_n]=\int_a^b G_j[x,y_1,\dots y_n,y'_1,\dots y'_n]\,dx=L_j$$

وحيث $j=1:m$ ، L_j ثوابت عندئذ:

$$S=J+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j K_j$$

معادلات أولر:

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(F+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j G_j\right)-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial y'_i}\left(F+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j G_j\right)\right]=0$$

حيث $i = 1, n$

مثال:

أوجد منحني التوقف للدالي:

$$J[y]=\int_0^1 y'^2\,dx$$
$$y(0)=y(1)=0$$

$$K_1[y]=\int_0^1 y\,dx=0$$
$$K_2[y]=\int_0^1 x.y\,dx=1$$

الحل:

$$S = J+\lambda_1 K_1+\lambda_2 K_2$$

$$F=y'^2,\quad G_1=y,\quad G_2=x.y$$

$$H=F+\lambda_1 G_1+\lambda_2 G_2$$

$$\boxed{H=y'^2+\lambda_1 y+\lambda_2 x.y}$$

معادلة أولر لاغرانج:

$$H_y-\frac{d}{dx}(H_{y'})=0 \Longrightarrow$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 x - \frac{d}{dx}(2y') = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 x - 2y'' = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y'' = \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2} x}$$ نكامل مرتين

$$y' = \frac{\lambda_1}{2} x + \frac{\lambda_2}{4} x^2 + C_1$$

$$\boxed{y = \frac{\lambda_1}{4} x^2 + \frac{\lambda_2}{12} x^3 + C_1 x + C_2}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{12} + C_1 = 0} \quad \cdots (1)$$

من K_1 $$\int_0^1 y\,dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 \left[\frac{\lambda_1}{4} x^2 + \frac{\lambda_2}{12} x^3 + C_1 x + 0\right] dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_1}{12} + \frac{\lambda_2}{48} + \frac{C_1}{2} = 0$$

$$\boxed{4\lambda_1 + \lambda_2 + 24 C_1 = 0} \quad \cdots (2)$$

من K_2 $$\int_0^1 x \cdot y\,dx = 1 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \left[\frac{\lambda_1}{4} x^3 + \frac{\lambda_2}{12} x^4 + C_1 x^2\right] dx = 1$$

بالتكامل :

$$\frac{\lambda_1}{16} + \frac{\lambda_2}{60} + \frac{C_1}{3} = 1$$

نضرب 240 ؟ $\Rightarrow$ $\boxed{15\lambda_1 + 4\lambda_2 + 80c_1 = 240}$ 3

نحل جملة المعادلات (1) و (2) و (3) نجد :

$$\lambda_1 = 720 \, , \quad \lambda_2 = -1440 \, , \quad c_1 = -60$$

$$\boxed{y(x) = \frac{720}{4} x^2 - \frac{1440}{12} x^3 - 60x}$$

$$y(x) = 180 x^2 - 120 x^3 - 60 x$$

هو المنحني المحرج للدالي J .

ملاحظة (2) :

م . ص

إذا كان لدينا الدالي :

$$J[y, z] = \int_a^b F[x, y, z, y', z'] \, dx$$

وكان لدينا معادلة السطح :

$$G(x, y, z) = 0$$

وكان :

$$z(a) = A_2 \quad \Big\{ \quad y(a) = A_1$$
$$z(b) = B_2 \quad \Big\} \quad y(b) = B_1$$

وكان للدالي $J[y, z]$ قيمة قصوى عند $y(x)$ و $z(x)$

وليس كل من G_x و G_y يساوي الصفر عند أي نقطة من

نقاط السطح G فتوجد دالة $\lambda(x)$ بحيث ؟ نه

$y(x)$ و $z(x)$ مقاماً قصوى للدالي !

$$S[y,z]=\int_a^b [F+\lambda(x)\cdot G]\,dx$$

معادلات اولر :

$$F_y+\lambda G_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

$$F_z+\lambda G_z-\frac{d}{dx}F_{z'}=0$$

مثال :

أوجد منحنيات لتوقف للدالي :

$$J[y,z]=\int_0^1 (y'^2+z'^2)\,dx$$

حيث : $y(0)=2$, $y(1)=e$; $z(0)=1$, $z(1)=2e$

بالاضافة الى :

$$G(x,y,z,y',z')=y'-z=0$$

الحل :

$$F=y'^2+z'^2$$

$$G=y'-z$$

هنا λ تابع لـ x

$$H=F+\lambda G=(y'^2+z'^2)+\lambda_{(x)}(y'-z)$$

$$\Rightarrow H=y'^2+z'^2+\lambda y'-\lambda z$$

$$H_y-\frac{d}{dx}(H_{y'})=0\Rightarrow$$

$$-\frac{d}{dx}(2y'+\lambda)=0$$

$$2y''+\lambda'=0 \quad\ldots\ldots(1)$$

$$H_z - \frac{d}{dx}(H_{z'}) = 0 \Rightarrow$$

$$-\lambda - \frac{d}{dx}(2z') = 0 \Rightarrow$$

$$-\lambda - 2z'' = 0 \Rightarrow \boxed{2z'' + \lambda = 0} \quad \ldots (2)$$

ولكن: لدينا من G أن: $\boxed{y' = z} \ldots \star$

من (1) و (2) و $\star$ نجد:

$$y^{(4)} - y^{(2)} = 0 \rightarrow \lambda^4 - \lambda^2 = 0 \quad \lambda^2(\lambda^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + c_4 e^{x}$$ مضاعف $\lambda = 0$ $\quad \lambda = \mp 1$

$$z(x) = c_2 - c_3 e^{-x} + c_4 e^{x}$$

حيث الثوابت يتم تحديدها من الشروط.

المبرهنة الاساسية في حساب التحولات:

اذا كان $\int_a^b \alpha(x) \cdot f(x)\, dx = 0$

و $f(a) = f(b) = 0$ و $\alpha(x)$ دالة مستمرة في $[a,b]$

و $f(x) \in \mathcal{L}$ الدوال المستمرة

$\Leftarrow \alpha(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

- البرهان: يحوي فقط a و b

نفرض جدلاً أن $\alpha(x^*) \neq 0$ حيث $x^* \in \{a,b\}$

$\Leftarrow \alpha(x^*) < 0$ أو $\alpha(x^*) > 0$ يكفي إثبات واحدة

$$\Downarrow$$

$$-\alpha(x^*) > 0$$

$x \in \{c, d\}$ $\alpha(x) > 0$ $a < c < x < d < b$

$$f^* \begin{cases} (x-c)(d-x) & x \in [c,d] \\ 0 & x \in [a,b] - [c,d] \end{cases}$$

$$\int_a^b \alpha(x) . f^*(x)\, dx = 0$$

$$f^*(a) = f^*(b) = f^*(c) = f^*(d) = 0$$

$$\int_a^b \alpha(x)(x-c)(d-x)\, dx = 0$$

$\alpha(x) > 0$

ونلاحظ أن $(x-c) > 0$, $(d-x) > 0$

$$\Leftarrow \int_a^b \alpha(x) . f^*(x)\, dx > 0$$

وهذا تناقض

$$\Leftarrow \forall x \in [a,b]\ \alpha(x) = 0$$