**مبرهنة:** ليكن $V$، $W$ فضائين شعاعيين منتهيين على حقل $F$ و $A$، $A'$ قاعدتين مرتبتين في $V$ ، $B$، $B'$ قاعدتين مرتبتين في $W$. إذا كان $L: V \longrightarrow W$ تطبيقاً خطياً وكانت $H$ مصفوفة $L$ بالنسبة لـ $A$، $B$ و $P$ مصفوفة الانتقال من $A$ إلى $B$ و $Q$ مصفوفة الانتقال من $A$ إلى $A'$ فإن مصفوفة $L$ بالانتقال من $B$ إلى $B'$ تكون:
$$H' = Q H . P^{-1}$$

**الإثبات:** ليكن $I: V_A \longrightarrow V_{A'}$ التطبيق المطابق مصفوفته بالنسبة لـ $A$ و $A'$ هي $P$

$I': W_B \longrightarrow W_{B'}$ التطبيق المطابق مصفوفته بالنسبة لـ $B$ و $B'$ هي $Q$

~~مصفوفة الانتقال من A إلى B هي~~

$$P = I' \circ L \circ I^{-1} : V_{A'} \xrightarrow{I^{-1}} V_A \xrightarrow{L} W_B \xrightarrow{I'} W_{B'}$$

تكون مصفوفة $L$ بالنسبة للقاعدتين $A'$ و $B'$ هي
$$H' = Q . H . P^{-1}$$

**مثال:** $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ تطبيق خطي

$$L(x, y) = (x, x+y, y)$$

١. أوجد $H$ مصفوفة $L$ بالنسبة للقاعدتين القانونيتين.

٢. أوجد $P$ مصفوفة الانتقال من القاعدة المرتبة إلى القانونية

$$A = a_1 = (1, 1) \ , \ a_2 = (1, 2)$$

٣. أوجد $Q$ مصفوفة الانتقال من القاعدة القانونية إلى القاعدة المرتبة

$$B = b_1 = (0, 1, 1) \ , \ b_2 = (1, 0, 1) \ , \ b_3 = (1, 1, 0)$$

٤. أوجد $H'$ مصفوفة $L$ بالنسبة للقاعدة المرتبة $A$ و $B$ ثم تحقق أن
$$H' = Q . H . P^{-1}$$

**الحل:**

١.

$$E = \{e_1 = (1, 0) \ , \ e_2 = (0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$E' = \{e'_1 = (1, 0, 0) \ , \ e'_2 = (0, 1, 0) \ , \ e'_3 = (0, 0, 1)\}$$
$$\left.\begin{array}{l} L(e_1) = L(1, 0) = (1, 1, 0) = e'_1 + e'_2 + 0e'_3 \\ L(e_2) = L(0, 1) = (0, 1, 1) = 0e'_1 + e'_2 + e'_3 \end{array}\right\} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

/ /

$a_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \Rightarrow (1,1) = (\lambda_1, \lambda_2) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$a_1 = e_1 + e_2$

$a_2 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \Rightarrow (1,2) = (\lambda_1, \lambda_2) \Rightarrow \lambda_1 = 1 , \lambda_2 = 2$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad a_2 = e_1 + 2e_2$

$e_1' = (1,0,0) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = (\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2)$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \lambda_2 + \lambda_3 \Rightarrow 2\lambda_3 & \Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{2} \\ 0 = \lambda_1 + \lambda_3 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_3 \\ 0 = \lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_1 - \lambda_3 \end{cases}$

$\lambda_1 = -\frac{1}{2} , \lambda_2 = \frac{1}{2} , \lambda_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow e_1' = -1/2 v_1 + 1/2 v_2 + 1/2 v_3$

$e_2' = (0,1,0) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = (\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2)$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \lambda_2 + \lambda_3 & \Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_3 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_3 & \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ 0 = \lambda_1 + \lambda_2 & \Rightarrow \lambda_2 = 1 - \lambda_3 - \lambda_3 \end{cases}$

$\lambda_2 = -\frac{1}{2} , \lambda_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow e_2' = 1/2 v_1 - 1/2 v_2 + 1/2 v_2$

$L(a_3) = (1,1,0)$

وبالمثل نحسب مع ان

$e_3' = \frac{1}{2} v_1 + 1/2 v_2 - 1/2 v_3$

$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = 1/2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$L(a_1) = L(1,1) = (1,2,1)$

$= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = (\lambda_2 + \lambda_3 , \lambda_1 + \lambda_3 , \lambda_2 + \lambda_1)$

$\Rightarrow 1 = \lambda_2 + \lambda_3 \Rightarrow \lambda_2 = 1 - \lambda_1 = 0$

$2 = \lambda_1 + \lambda_3 \Rightarrow \lambda_1 = 2 - \lambda_3 = 1$

$1 = \lambda_1 + \lambda_2 \qquad = 3 - 2\lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = 1$

$L(a_1) = b_1 + 0 b_2 + b_3$

$L(a_2) = L(1,2) = (1,3,2) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$

$= (\lambda_2 + \lambda_3 , \lambda_1 + \lambda_3 , \lambda_2 + \lambda_1)$

$$1 = \lambda_2 + \lambda_3 \Rightarrow \lambda_2 = 1 - \lambda_3 = 0$$

$$3 = \lambda_1 + \lambda_3 \Longrightarrow \lambda_1 = 3\lambda_3 = 2$$

$$2 = \lambda_1 + \lambda_2 = 4 - 2\lambda_3 \Longrightarrow \lambda_3 = 1$$

$$L(a_2) = 2b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

$$H' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q \cdot H \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} = H'$$