المحاضرة السابعة عشرة 2013/12/18

الاشتقاق:

1) تعريف الاشتقاق / أمثلة / 2) المعنى الهندسي للاشتقاق
3) اشتقاق من اليمين أو اليسار، 4) علاقة بين الاشتقاق والاستمرار،
5) العمليات على التوابع القابلة للاشتقاق 6) اشتقاق التوابع المركبة
/ العكسية / الضمنية 7) قاعدة أوبتال في إزالة التعدم لتعيين
8) اشتقاق التوابع العكسية / المركبة / الضمنية 9) اشتقاق من مراتب دنيا.
10) نشر لدوال وحيد حدودين / ثلاثيين، 11) برهان نظرية لوبتال
12) مبرهنات نظرية لوبتال أول 13) الأنواع الكشي 14) أرقام التوابع

1): تعريف بالاشتقاق:

ليكن تابع f معرف على مجال $]a,b[$ نقول إنه قابل للاشتقاق عند النقطة $x_0 \in]a,b[$ إذا وجد $A \in \mathbb{R}$ حيث:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$$

$x \to x_0 \Rightarrow \Delta x \to 0$ وبالتالي إذا كان $x - x_0 = \Delta x$ 2) نضع

وبالتالي نضع النهاية

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A$$

مثال: أوجد مشتق التوابع التالية مستنتجاً توابع المشتق:

1): $f(x) = C \Longrightarrow f'(x) = 0 \in \mathbb{R}$ 2): $f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = n x^{n-1} \in \mathbb{R}$

3): $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x \in \mathbb{R}$ 4): $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \in]0, +\infty[$

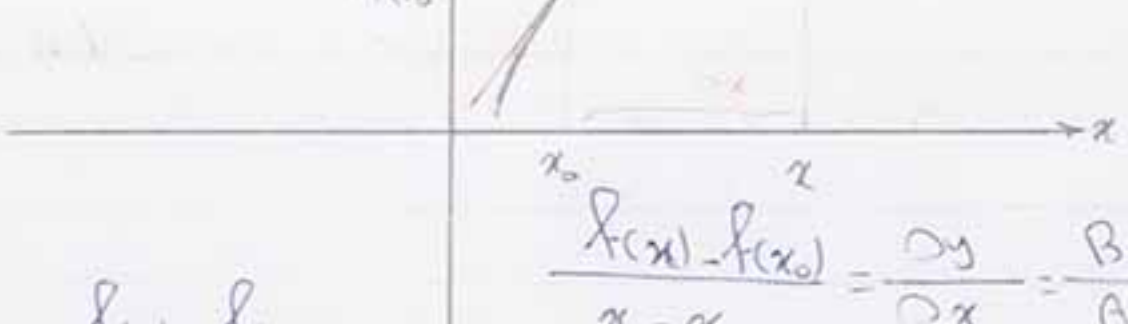
5): $f(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \in \mathbb{R}^*$ 6): $f(x) = \ln x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \in]0, +\infty[$

7): $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x_0+\Delta x) - \ln x_0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(\frac{x_0+\Delta x}{x_0}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1+\frac{1}{x_0}\Delta x\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$= \ln \lim_{\Delta x \to 0} \left(1+\frac{1}{x_0}\Delta x\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln e^{\frac{1}{x_0}} = \boxed{\frac{1}{x_0}}$$



$$\tan\theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{BC}{AC} \Longrightarrow$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$m = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$\Longrightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$ ← معادلة المماس

- إذا كان $f'(x_0) = +\infty$ فإن المماس (المستقيم) يوازي yy'
- $f'(x) = 0$ فإن المستقيم (المماس) يوازي xx'.

$]a,b[$

$$f'(x_0+0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0-0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

مثال: $y = \sqrt{x}$ عند 0

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$$

f قابل للإشتقاف عند x_0

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\Longrightarrow \lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=f'(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0\Longrightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=0\Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

وبالتالي f مستمرة عند x_0

مثال: $y=|x|$ مستمرة عند $x_0=0$ ولكنها غير قابلة للإشتقاف عند $x_0=0$

5) نعلم أنه إذا كان f و g تابعين قابلين للإشتقاف عند x_0

1) $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

$$(f+g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\left[f(x)+g(x)\right]-\left[f(x_0)-g(x_0)\right]}{x-x_0}$$

2) $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$

3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-g'(x_0)\,f(x_0)}{[g(x_0)]^2}$: $g(x_0)\neq 0$, $g(x)\neq 0$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

6) مشتقات مرتبة أعلى:

1): $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$

2): $(u\cdot v)''=(u'\cdot v+v'\cdot u)=u''v+u'v'+u'\cdot v'+v''\cdot u$

$=u''v+2u'\cdot v'+u\cdot v''$

3): $(u\cdot v)^{(3)}$ أي $(u\cdot v)'''=(u''v+2u'\cdot v'+u\cdot v'')'$

$=u'''v+v'\cdot u''+2(u''\cdot v'+v''\cdot u')+u'\cdot v''+v'''\cdot u$

$=u'''v+v'\cdot u''+2u'v'+2v''\cdot u'+u'\cdot v''+v'''\cdot u$

$=u'''v+3u'v'+3u'v''+uv'''$

n): $(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}v+\frac{n}{1!}u^{(n-1)}v^{(1)}+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v^{(2)}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}u^{(n-r)}v^{(r)}+\cdots+uv^{(n)}$

$=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}u^{(n-r)}v^{(r)}$

ملاحظة: $u^{(n)}$ ليس بالضرورة دالة من الدرجة n أي أن مشتقة الدالة u ليست بالضرورة معدومة بعد عدد n من الاشتقاق.

ALADDIN.net