... حـل الـتـمـاريـن ...

تمرين (1) :

باستخدام قيم الثوابت (a_0, a_n, b_n) عند نشر التابع $f(x) = x^2$ في متسلسلة فورييه على المجال $I = [-\pi, +\pi]$ .. وباستخدام متطابقة بارسيفال ,, أوجد مجموع المتسلسلة المتقاربة التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$ ثم أوجد أيضاً مجموع المتسلسلة المتقاربة $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

الحل :

كنّا قد حصلنا في منشور فورييه للتابع : $f(x) = x^2$ على القيم التالية :

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3} \quad , \quad a_n = \frac{4}{n^2} \quad , \quad b_n = 0$$

وبناءً عليها .. نطبق متطابقة بارسيفال كالتالي :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x)]^2 . dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} . \frac{4\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} (-1)^{2n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x^4 . dx \Rightarrow \frac{1}{2} . \frac{4\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-\pi}^{+\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^5}{5} - \frac{(-\pi)^5}{5} \right) = \frac{2}{\pi} . \frac{\pi^5}{5} \Rightarrow \frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2\pi^4}{5}$$

$$\Rightarrow 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2\pi^4}{5} - \frac{2\pi^4}{9} \Rightarrow 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{18\pi^4 - 10\pi^4}{45} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

الآن :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = ؟؟$$

نلاحظ أن المقدار : $(2n-1)^4$ هو مقدار فردي دوماً أما المقدار n^4 فيحوي كلا المقادير الفردية والزوجية .. عندئذٍ و بناءً على هذه الملاحظة نقوم بعزل القيم الفردية من المجموع التالي :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}+\cdots$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\underbrace{\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots\right)}_{(*)}+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots\right)\Rightarrow$$

من القيم الزوجية نلاحظ أن المقدار $\left(\frac{1}{2^4}\right)$ مقدار مشترك .. وبالتالي نكتب :

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\overbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}}^{(*)}+\frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}}_{\frac{\pi^4}{90}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}+\frac{1}{16}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}}_{\frac{\pi^4}{90}}\Rightarrow\frac{\pi^4}{90}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}+\frac{1}{16}\cdot\frac{\pi^4}{90}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{90}-\frac{\pi^4}{16.90}=\frac{15\,\pi^4}{16.90}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

تمرين (2) :

احسب التكامل التالي :

$$I(t)=\int_0^t\frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}.dx$$

الحل : نستخدم الدستور ..

$$\frac{dI}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\int_a^b f(x,t).dx\right]=\int_a^b\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}.dx+f(b(t).t).\frac{db}{dt}-f(a(t),t).\frac{da}{dt}$$

$$\Rightarrow\frac{dI(t)}{dt}=\underbrace{\int_0^t\frac{x}{(1+tx)(1+x^2)}.dx}_{G}+\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\times 1-0\quad(*)$$

نحسب أولاً (G) .. (نحلل لكسور بسيطة)

$$\frac{x}{(1+tx)(1+x^2)}=\frac{A}{1+tx}+\frac{Bx+C}{1+x^2}\xRightarrow{\text{نوحد المقامات ونحذفها}}$$

$$x=A(1+x^2)+Bx+C(1+tx)=A+Ax^2+Bx+C+Btx^2+Ctx$$

$$\Rightarrow x=(A+Bt)x^2+(B+Ct)x+(A+C)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+Bt=0\,..\,(1)\\B+Ct=1\\A+C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-C\\B=1-Ct\end{cases}\Rightarrow\{(1)\ \text{نعوض في}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A=-C=-\dfrac{t}{1+t^2}\\[2mm] C=\dfrac{t}{1+t^2}\\[2mm] \Rightarrow B=1-\dfrac{t}{1+t^2}=\dfrac{1}{1+t^2}\end{cases}\qquad\Rightarrow$$

$$\frac{x}{(1+tx)(1+x^2)}=\frac{1}{1+t^2}\ \frac{-t}{1+tx}+\frac{\frac{1}{1+t^2}x+\frac{t}{1+t^2}}{1+x^2}=\frac{1}{1+t^2}\left[\frac{-t}{1+tx}+\frac{x+t}{1+x^2}\right]$$

الآن نكامل ..

$$G=\int_0^t\frac{x}{(1+tx)(1+x^2)}=\frac{1}{1+t^2}\left[\int_0^t\frac{-t.dx}{1+tx}+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{2x.dx}{1+x^2}+\int_o^t\frac{t.dx}{1+x^2}\right]$$

$$\Rightarrow G=\frac{1}{1+t^2}\left[[-\ln(1+tx)]_0^t+\frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_0^t+t.[arc\,tgx]_o^t\right]$$

$$=\frac{1}{1+t^2}\left[-\ln(1+t^2)+\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+t(arc\,tgt)\right]$$

$$=\frac{1}{1+t^2}\left[-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+t(arc\,tgt)\right]$$

$$\Rightarrow G=-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+t^2)}\ln(1+t^2)+\frac{t}{1+t^2}(arc\,tgt)\quad\Rightarrow (*)\ \text{نعوض في}$$

$$\Rightarrow\frac{dI(t)}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+t^2)}\ln(1+t^2)+\frac{t}{1+t^2}(arc\,tgt)+\frac{1}{1+t^2}\ln(1+t^2)$$

وبذلك نكون قد حصلنا على المشتق $\frac{dI(t)}{dt}$ .. ولكن نحن نريد الحصول على التكامل .. إذاً نكامل الطرفين بالنسبة لـ (t) فنجد ما يلي :

$$\Rightarrow \; I(t) + k = \int -\frac{1}{2}\frac{1}{(1+t^2)}\ln(1+t^2).dt + \int \frac{t}{1+t^2}(arc\,tgt).dt + \int \frac{1}{1+t^2}\ln(1+t^2).dt$$

$$\Rightarrow \; I(t) + k = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\ln(1+t^2).dt + \underbrace{\int \overbrace{(arc\,tgt)}^{u}\;\overbrace{\frac{t}{1+t^2}.dt}^{dv}}_{L} \quad (**)$$

نكامل (L) ..

$$\Rightarrow \begin{cases} u = arc\,tgt \Rightarrow du = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ dv = \dfrac{t}{1+t^2}.dt = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2.t.dt}{1+t^2} \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\,arc\,tgt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\ln(1+t^2).dt \Rightarrow$$ نعوض في $(**)$

$$\Rightarrow I(t) + k = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\ln(1+t^2).dt + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\,arc\,tgt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\ln(1+t^2).dt$$

$$\Rightarrow I(t) + k = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\,arc\,tgt$$

ولكن : $I(0) = 0$ .. إذاً : نبدل (t) بـ : (0) في المساواة الأخيرة فنجد أن : $k = 0 \Leftarrow 0 + k = 0$
وبالتالي قيمة التكامل $I(t)$ المطلوبة هي :

$$\boxed{I(t) = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\,arc\,tgt}$$

تمرين (3) :

ادرس التكامل المعتل التالي :

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

الحل : (نقسم التكامل إلى تكاملين)

$$I = \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{I_2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [arc\sin x]_{-1}^{0} = \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} \\ \\ I_2 = \int_{0}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [arc\sin x]_{0}^{+1} = \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow I = I_1 + I_2 = \pi$$

ومنه التكامل I متقارب .. وقيمته تساوي π ..

تمرين (4) :

ادرس التكامل المعتل التالي :

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{2+\sin x}{x^2} . dx$$

الحل : فلندرس التابع ..

$$-1 \leq \sin x \leq +1 \quad \Rightarrow (2) \text{ نضيف}$$

$$1 \leq 2 + \sin x \leq 3 \quad \Rightarrow (x^2) \text{ نقسم على}$$

$$\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\text{متقاربة}} \leq \frac{2+\sin x}{x^2} \leq \frac{3}{x^2} \quad : \forall x \epsilon \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right]$$

ولكن التكامل :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{3}{x^2} dx = \left[-3.\frac{1}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} = \left(0 - \frac{-6}{\pi}\right) = \frac{6}{\pi}$$

إذاً .. التكامل متقارب وبالتالي التكامل :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{2+\sin x}{x^2} . dx$$

متقارب أيضاً وذلك حسب اختبار المقارنة ....

((... انتهت محاضرات مقرر التحليل (3) ...))

نسألُ الله أنْ تكون قد تمَّت الإفادة ... والله وليُّ التوفيق