سطوح الدرجة الثانية:

نعرف السطوح الدرجة الثانية بأنها السطوح التي معادلاتها في جملة احداثيات ديكارتية متعامدة ونظامية بالنسبة إلى $x.y.z$ لها الشكل العام التالي:

$$f(x,y,z)=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2$$
$$+b_1xy+b_2yz+b_3xz$$
$$+c_1x+c_2y+c_3z+d=0$$

تسمى الحدود الثلاثة الأولى بالحدود المربعة وتسمى الحدود الثلاثة التالية بالحدود المستطيلة أما الحدود الثلاثة قبل الحد الثابت تسمى الحدود الخطية
ويمكن اختزال هذه المعادلة إلى الشكل:

$$F(x,y,z)+P(x,y,z)+d=0$$

حيث كل من $F(x,y,z)$ ، $P(x,y,z)$ تابعين متجانسين الأول من المرتبة الثانية أما الثاني فهو من المرتبة الأولى والحد الثابت d يعتبر تابعاً متجانساً من الدرجة صفر.

إيجاد مركز سطح الدرجة الثانية:

نقول عن السطح S أنه متناظر بالنسبة للمبدأ O اذا تحقق أن

$$F(x,y,z)=f(-x,-y,-z)$$

ومن الواضح أن هذا الشرط لا يتحقق إلا إذا انعدمت أمثال الحدود الخطية أو اذا خلت المعادلة من الحدود الخطية أي أن $c_1=c_2=c_3=0$
واذا كانت المعادلة تحوي حدوداً خطية وكانت النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ مركز تناظر للسطح S فإن انسحاب الجملة المعتمدة وفق الشعاع $\overrightarrow{OM_0}$ يجب أن يحذف الحدود الخطية وعليه لإيجاد M_0 مركز السطح يلزم ويكفي أن نبحث عن انسحاب يجعل الحدود الخطية غير موجودة في معادلة السطح.

نعوض في معادلة السطح نحصل على ثلاث معادلات تحدد مجاهيل x_0,y_0,z_0

$$x=x_0+X$$
$$y=y_0+Y$$
$$z=z_0+Z$$

$$\left.\begin{array}{ll} X \text{ أمثال} & 2a_1x_0+b_1y_0+b_3z_0+c_1=0 \\ Y \text{ أمثال} & b_1x_0+2a_2y_0+b_3z_0+c_2=0 \\ Z \text{ أمثال} & b_3x_0+b_2y_0+2a_3z_0+c_3=0 \end{array}\right\} (*)$$

حتى يكون لهذه الجملة حل وحيد يجب أن يكون محدد الأمثال في جملة المعادلات (*) لا يساوي الصفر عندئذ نجد

$$x_0=\frac{\Delta x}{\Delta},\ y_0=\frac{\Delta y}{\Delta},\ z_0=\frac{\Delta z}{\Delta}$$

ويكون للسطح مركز تناظر وحيد هو (x_0, y_0, z_0). أما إذا كان $\Delta = 0$ يساوي الصفر نكون أمام ما يلي: ① $\Delta x \neq 0, \Delta y \neq 0, \Delta z \neq 0$

عندئذ المعادلات الثلاث لا تساوي الصفر عندئذ ليس للجملة حل (لا يوجد مركز تناظر)

② $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0 \Leftarrow$ [illegible]

[illegible] نبين أن الجملة ترد إلى معادلتين بثلاث مجاهيل ولها عدد غير منته من الحلول.

- إذا أمعنا النظر في جملة المعادلات (*) نرى أنها تمثل ثلاث مستويات هذه المستويات إما أن تكون متقاطعة في نقطة وفي توافق الحل الجبري الأول ومن أجلها يكون للسطح مركز تناظر وحيد

أما من أجل $\Delta = 0$ تكون نواظم هذه المستويات الثلاثة تقع في مستوٍ واحد وهنا نميز ما يلي:

أ) الموافقة لـ ① $\Delta x \neq 0, \Delta y \neq 0, \Delta z \neq 0$ الجملة مستحيلة الحل عندها تكون المستويات متقاطعة مثنى وتوازي مستقيماً معيناً، وتشكل الوجوه الثلاثة لـ ~~موشور~~ موشور هنا نقول لا يوجد للسطح مركز تناظر

ب) $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0, \Delta = 0$: في هذه الحالة للجملة عدد لا نهائي من الحلول هذه الحلول هندسياً تتوزع على الفصل المشترك لهذه المستويات عندئذ نقول أن للسطح محور تناظر هو الفصل المشترك للمستويات الثلاثة.

ج) $\Delta = 0$: بسبب تناسب العناصر المتقابلة في سطرين على الأقل فالجملة مستحيلة الحل. لأنه في الحقيقة تمثل جملة ثلاث مستويات اثنان منها على الأقل متوازيان عندئذ لا يكون للسطح مركز تناظر أو محور تناظر.

د) إذا تناسبت أمثال المجاهيل في كل سطرين مع الثوابت الواردة في المعادلات الثلاثة فالجملة تمثل ثلاث مستويات متطابقة وتكون عندئذ جميع نقاط مستويها المشترك نقاط تناظر للسطح ويكون هذا المستوي هو مستوي التناظر بالنسبة للسطح.

ملاحظة: نلاحظ أن جملة المعادلات (*) تمثل المشتقات الجزئية لمعادلات السطح S بالنسبة إلى z, y, x وعليه من أجل إيجاد مركز تناظر السطح نقوم بحساب المشتقات الجزئية لمعادلة السطح ونساويها بالصفر فنحصل على جملة ثلاث معادلات ثلاث مجاهيل نطرق عليها الشكل السابق.

مثال: أوجد مركز تناظر السطح المعين بالمعادلة:

$$F(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz - 6y + 8z + 1 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 2y - 2z = 0 \\ f'(y) &= 2x - 2y - 6 = 0 \\ f'(z) &= -2x + 4z + 8 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad \Delta \neq 0$$

$\Rightarrow$ للسطح مركز تناظر.

- عين مركز تناظر السطح المعطى بالمعادلة:

$$F(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - z^2 - 4xy - 2yz + 2x + 4z - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 4y + 2 = 0 \quad (1) \\ f'(y) &= 6y - 4x - 2z = 0 \quad (2) \\ f'(z) &= -2z - 2y + 4 = 0 \quad (3) \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \Delta = 0$$

الجملة لها عدد غير منته من الحلول تتوضع على المستقيم المعين بتقاطع المستويين:

$$y + z - 2 = 0$$
$$x - 2y + 1 = 0$$

ونلاحظ أن المستويات الثلاثة ما هي إلا معادلتي تشكلت معادلتي الفصل المشترك وذلك لأنه بجمع (2) و (3) نحصل على (1) $\Leftarrow$، السطح يقبل محور تناظر هو الفصل المشترك للمستويين.

مثال: أوجد مركز تناظر السطح المعين بالمعادلة:

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x + 7y + z = 0$$

$f'_x =$

f'_y

$f'_z =$

نجد أن المعادلات الثلاثة تشكلات معادلتي مستويين متوازيين $\Leftarrow$ لا يوجد حل للجملة ولا يوجد تناظر للسطح.

[illegible] لا [illegible] السطح المعرف بالمعادلة

$$F(x.y.z) = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz - 4yz - x + y - 2z = 0$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_0 - 2y_0 + 4z_0 - 1 &= 0 \\ -2x_0 + 2y_0 - 4z_0 + 1 &= 0 \\ 4x_0 - 4y_0 + 8z_0 - 2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

نلاحظ أن المعادلات الثلاثة تمثل معادلة واحدة متكررة ثلاث مرات أي تمثل ثلاثة مستويات متطابقة و الجملة عدد غير منتهي من الحلول تتوضع على المستوي (أي واحد من المستويات) الذي يسمى مستوي تناظر للسطح.

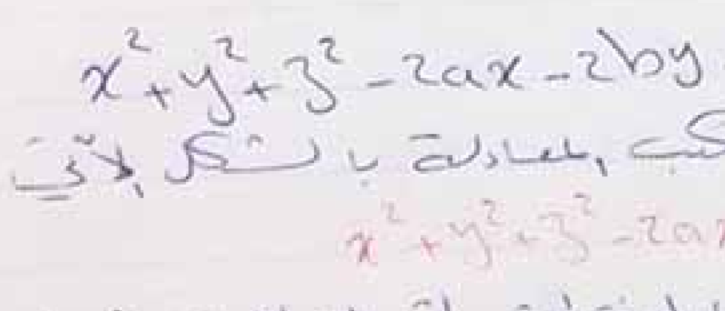
2013/12/17 — المحاضرة الثانية عشرة

الكرة:

تعريف: تعرف الكرة بأنها المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ $M(x.y.z)$ المتساوية البعد عن نقطة ثابتة احداثياتها (a,b,c) في $\mathbb{R}^3$ الكرة والبعد الثابت يسمى نصف قطر الكرة ونرمز له بالرمز R

انطلاقاً من التعريف $(\overrightarrow{CM})^2 = R^2$

ومن قانون البعد بين نقطتين:



المعادلة التبريرية: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

بفك المطابقات:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 + z^2 - 2cz + c^2 = R^2$$

نرتب المقادير:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0$$

نفرض المقدار $a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = d$ وعندها نكتب المعادلة بالشكل الآتي:

المعادلة ((العامة)) ((النموذجية)) ⊛ $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

في الصيغة السابقة لمعادلة الكرة: مركزها النقطة التي احداثياتها (a,b,c) نصف قطرها R نسميها بالمعادلة المنشورة ((النموذجية)). والصيغة قبل النشر في الصيغة القياسية. من ①: $\Leftarrow R^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d$