... تحـويـل لابـلاس الـعـكـسـي ...

نعلم أن : $f(t) \longrightarrow L[f(t)] = \mathrm{F(s)}$

ومنه : $L^{-1}[F(s)] = f(t)$

L^{-1} يرمز للمؤثر الذي يدل على تحويل لابلاس العكسي ..

خاصة هامة :

L^{-1} هو مؤثر خطي .. أي أن :

$$L^{-1}[\beta_1.F_1(s) + \beta_2.F_2(s)] = \beta_1.L^{-1}[F_1(s)] + \beta_2.L^{-1}[F_2(s)]$$

أمثلة :

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{2!}.\frac{2!}{s^2+1}\right] = \frac{1}{2!}.L^{-1}\left[\frac{2!}{s^2+1}\right] = \frac{1}{2}t^2$$

$$L^{-1}\left[\frac{5}{s+1}\right] = 5.L^{-1}\left[\frac{1}{s-(-1)}\right] = 5.e^{-t}$$

تمرين :

أوجد تحويل لابلاس العكسي $L^{-1}[F(s)]$ إذا علمت أن :

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} \xRightarrow{\text{نوحد المقامات ونحذفها}} 0.s + 1 = (A+B)s + A \Longrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \Longrightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = 1 - e^{-t}$$

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4)}$$

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4} \xRightarrow{\text{نوحد المقامات ونحذفها}} 0s^2 + s + 1 = (A+B)s^2 + Cs + 4A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=1 \\ 4A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \\ C=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{s+1}{s(s^2+4)}=\frac{1}{4}.\frac{1}{s}+\frac{-\frac{1}{4}s+1}{s^2+4} \Rightarrow$$

$$L^{-1}[F(s)]=\frac{1}{4}.L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\frac{1}{4}.L^{-1}\left[\frac{S}{s^2.2^2}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{s^2.2^2}\right]$$

$$=\frac{1}{4}.L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\frac{1}{4}.L^{-1}\left[\frac{S}{s^2.2^2}\right]+\frac{1}{2}.L^{-1}\left[\frac{2}{S^2.2^2}\right]$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t$$

$$F(s)=\frac{3s+2}{s^2+2s+2}$$

نتمم أولاً المقام لمربع كامل ..

$$\Rightarrow F(s)=\frac{3s+2}{s^2+2s+1-1+2}=\frac{3s+2}{(s+1)^2+1}$$

نجانس بين البسط والمقام ..

$$\Rightarrow F(s)=\frac{3(s+1)-1}{(s+1)^2+1}$$

نقلص الكسر ((بإبدال $(s+1)$ بـ (s))) ..

$$\Rightarrow \frac{3s-1}{s^2+1}=3\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1} \Rightarrow$$ (نؤثّر بتحويل لابلاس العكسي)

$$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{3s-1}{s^2+1}\right]=3.L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]=3.\cos t-\sin t$$

ومنه وبالإعتماد على القاعدة : $\left(\, (L[f(t)]=F(s) \Rightarrow L[e^{kt}.f(t)]=F(s-k)\,\right)$

$\left[\, k=-1 \text{ بملاحظة } \right] \Rightarrow s+1 \Rightarrow$ (نضرب الجواب بـ $\langle e^{kt}=e^{-t}\rangle$)

$$\Rightarrow L^{-1}[F(s)]=e^{-t}(3\cos t-\sin t)$$

... مبرهنة الطي ...

لنفرض أن : $L^{-1}[F(s)]=f(t)$ .. وأن : $L^{-1}[G(s)]=g(t)$ .. عندئذٍ :

$$\langle\langle\, L^{-1}[F(s).G(s)]=\int_0^t f(u).g(t-u).du \,\rangle\rangle$$

مثال :

أوجد $L^{-1}[F(s)]$ .. إذا علمت أن : $F(s)=\frac{1}{(s^2+1)^2}$

الحل :

لنفرض أن : $F(s)=\frac{1}{s^2+1}$ .. وأن : $G(s)=\frac{1}{s^2+1}$ .. ومنه :

$$\begin{cases} L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1}\right]=\sin t=f(t) \\ L^{-1}[G(s)]=L^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+1}\right]=\sin t=g(t) \end{cases} \Longrightarrow \{\text{نطبق مبرهنة الطي}\}$$

$$\Longrightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]=L^{-1}[F(s).G(s)]$$

$$=\int_0^t f(u).g(t-u).du=\int_0^t \sin u.\sin(t-u).du$$

نعلم أن : $\langle \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}\rangle \quad (*)$

$$\Longrightarrow L^{-1}[F(s)]=\int_0^t \sin u.\sin(t-u).du=-\frac{1}{2}\int_0^t -2\sin u.\sin(t-u).du$$

$$\xrightarrow{\text{من } (*)} =-\frac{1}{2}\int_0^t[\cos t-\cos(2u-t)]du=-\frac{1}{2}\left[u.\cos t-\frac{1}{2}\sin(2u-t)\right]_0^t$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\left(t.\cos t-\frac{1}{2}\sin t\right)-\left(0+\frac{1}{2}\sin t\right)\right]=-\frac{1}{2}[t.\cos t-\sin t]$$

$$\Longrightarrow L^{-1}[F(s)]=-\frac{1}{2}(t.\cos t-\sin t)$$

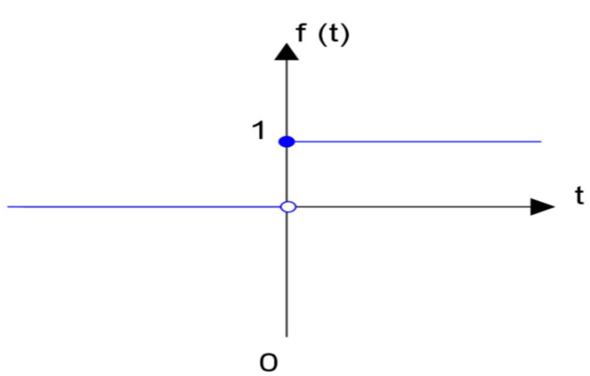
... تابع الخطوة الواحدة ... - *Unit Step Function* -

ـ نرمز له بـ : $H(t)\ \ or\ \ U(t)$

ـ معادلته وشكله :

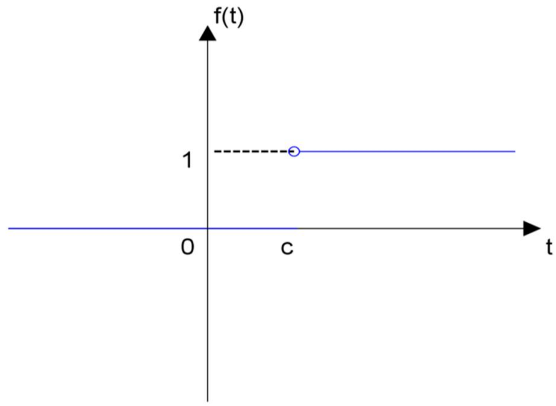
مبدأ الزمن هنا (t) ..

$$H(t)=\begin{cases}0 & : \quad (t\le 0) \\ 1 & : \quad (t>0)\end{cases}$$



ـ حالة أخرى :

و هنا مبدأ الزمن (c) ..



$$H(t-c)=\begin{cases}0 & : \quad (t\le c)\\ 1 & : \quad (t>c)\end{cases}$$

تحويل لابلاس لتابع الخطوة الواحدة :

$$c\ge 0 \implies L[H(t-c)]=\int_0^\infty e^{-st}.H(t-c).dt$$

$$=\int_0^c e^{-st}.H(t-c).dt+\int_c^\infty e^{-st}.H(t-c).dt$$

$$=\underbrace{\int_0^c 0.dt}_{0}+\int_c^\infty e^{-st}.dt=\int_c^\infty e^{-st}.dt=-\frac{1}{s}[e^{-st}]_c^\infty$$

$$=-\frac{1}{s}\left[\frac{1}{e^{st}}\right]_c^\infty=-\frac{1}{s}\left[0-\frac{1}{e^{sc}}\right]=\frac{1}{s}.e^{-st}$$

$$\implies c\ge 0\,;\; L[H(t-c)]=\frac{1}{s}.e^{-st}$$

... وظيفة ...

1) أوجد تحويل لابلاس العكسي التالي :

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s-1)}\right]$$

2) أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الذي من أجله يكون : $(x(0)=x'(0)=0)$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+4x=1$$

وذلك باستخدام ـ تحويلات لابلاس ـ

" انتهت المحاضرة " ....