

السنة : الثانية
الفصل : الأول

كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق
المقرر : بنى جبرية (1)
المحاضرة : (16)

المجموع المباشر للزمر

لتكن G زمرة و H, K زمر جزئية في G :
نقول إن G مجموع مباشر للزمرتين H, K : $G = H \times K$ إذا تحقق :

1- H, K زميرتين جزئيتين ناظمتين في G .

$$G = H \cdot K \quad -2$$

$$H \cap K = \langle e \rangle \quad -3$$

تمهيدية : لتكن G زمرة و H, K زمر جزئية ناظمية في G , إذا كان $H \cap K = \langle e \rangle$ عندئذٍ أيًا كان

$$h \cdot r = r \cdot h \quad \text{فإن } h \in H , r \in K$$

البرهان : ليكن $r \in K , h \in H$ عندئذٍ :

$$h \cdot r \cdot h^{-1} \cdot r^{-1} = (h \cdot r \cdot h^{-1})r^{-1} \in K \quad (\text{لأن } K \text{ ناظمية})$$

$$h \cdot r \cdot h^{-1} \cdot r^{-1} = h(r \cdot h^{-1} \cdot r^{-1}) \in H \quad (\text{لأن } H \text{ ناظمية})$$

$$h \cdot r \cdot h^{-1} \cdot r^{-1} \in H \cap K = \langle e \rangle \Rightarrow h \cdot r \cdot h^{-1} \cdot r^{-1} = e \Rightarrow h \cdot r = r \cdot h$$

ملاحظة : $H \cdot K = K \cdot H$ هذا لا يعني أن الزمرة تبديلية , العناصر التي تتبادل هي فقط k_0, h_0

ميرهنة : لتكن G زمرة وليكن H, K زمر جزئية ناظمية في G عندئذٍ الشروط الآتية متكافئة :

$$G = H \times K \quad -1$$

2- أيًا كان $g \in G$ فإن g يكتب بصورة وحيدة على النحو : $g = h_0 k_0$ بحيث $h_0 \in H , k_0 \in K$

الإثبات : (1 \Leftrightarrow 2) :

لنفرض أن $G = H \times K$ وليكن $g \in G = H \cdot K$ وبالتالي يوجد $h_1 \in H, k_1 \in K$ بحيث $g = h_1 k_1$

لنفرض أنه يوجد $h_2 \in H, k_2 \in K$ بحيث $g = h_2 k_2$

$$h_1 k_1 = h_2 k_2 \Rightarrow h_1 = h_2 k_2 k_1^{-1} \Rightarrow \overbrace{h_2^{-1} h_1}^{\in H} = \overbrace{k_2 k_1^{-1}}^{\in K} \in H \cap K = \langle e \rangle$$

ومنه يكون $h_2^{-1} h_1 = e$ وبالتالي $h_1 = h_2$, $k_2 k_1^{-1} = e$ وبالتالي $k_1 = k_2$.

(1 \Leftarrow 2) : H, K زمر جزئية ناظمية في G ومنه $H \cdot K \subseteq G$ زمرة جزئية ناظمية في G

ليكن $g \in G$ حسب الفرض $g = h_0 k_0$ حيث $h_0 \in H, k_0 \in K$

المحاضرة (16)

$$g = h_0 k_0 \in H \cdot K \implies G \subseteq H \cdot K \implies G = H \cdot K$$

لنفرض جدلاً أنّ $H \cap K \neq \langle e \rangle$ عندئذٍ $x \in H \cap K$ و $x \neq e$ بما أنّ $x \in H$ فإنه يوجد $h_0 \in H$ بحيث $x = h_0$ و $x \in K$ فيوجد $k_0 \in K$ بحيث $x = k_0$

$$h_0 = k_0 \implies h_0 k_0^{-1} = e \in H \cdot K = G$$

وبما أنّ الكتابة بشكل وحيد و $e = e \cdot e$ نجد أنّ $h_0 = e, k_0 = e$ ومنه $x = e$ وبالتالي $H \cap K = \langle e \rangle$

مبرهنة: لتكن G زمرة و H, K زمر جزئية ناظرية في G عندئذٍ: $H \times K \cong H \oplus K$

الإثبات: لنعرف العلاقة: $f: H \times K \longrightarrow H \oplus K$

$$\forall h_0 k_0 \in H \times K ; f(h_0 k_0) = (h_0, k_0)$$

ليكن $h_1 k_1 \in H \times K$ فنجد أنّ f تطبيق متباين:

$$h_0 k_0 = h_1 k_1 \iff h_0 = h_1, k_0 = k_1 \iff (h_0, k_0) = (h_1, k_1) \iff f(h_0 k_0) = f(h_1 k_1)$$

f غامر لأنّ $(x, y) \in H \oplus K$ فإنّ $x \in H, y \in K$ يوجد $xy \in H \times K$ بحيث $f(xy) = (x, y)$
 $f(h_0 k_0 h_1 k_1) = (h_0 h_1 k_0 k_1) = (h_0 h_1, k_0 k_1) = (h_0, k_0)(h_1, k_1) = f(h_0 k_0) f(h_1 k_1)$

ومنه f تشاكل، ومما سبق يكون f تماثل وبالتالي $H \times K \cong H \oplus K$

الزمر التبديلية المنتهية

مبرهنة: لتكن G زمرة تبديلية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي p ، عندئذٍ يوجد في G عنصر مرتبته p

الإثبات: لنفرض أنّ $(G:1) = n$ وأنّ $n = p \cdot m$ حيث أنّ عدد أولي

الإثبات بالاستقراء حسب m .. من أجل $m = 1$ عندئذٍ:

$n = p$ وفي هذه الحالة فإنّ الزمرة G تكون دوارة لأنّ مرتبتها p وبالتالي فإنّ العنصر المولد مرتبته p أي

$$0(a) = (G:1) = p \text{ و } G = \langle a \rangle$$

لنفرض أنّ المبرهنة صحيحة لأجل جميع الزمر الجزئية المحتواة تماماً في G ، نميز حالتين:

I - الحالة الأولى: يوجد في G زمرة جزئية $H \subsetneq G$ ودليلها لا يقبل القسمة على p

لنفرض H زمرة جزئية في G ، $H \subsetneq G$ ودليلها $(G:H)$ لا يقبل القسمة على p وحسب لاغرانج:

$$p \cdot m = n = (G:1) = (G:H)(H:1)$$

المحاضرة (16)

ومنه نجد أن $(H:1)$ تقبل القسمة على p (لأن $(G:H)$ لا تقبل القسمة على p) وحسب الفرض الاستقرائي فإن H تحوي عنصر مرتبته p وبالتالي فإن G تحوي عنصر مرتبته p .

II - الحالة الثانية : أدلة جميع الزمر الجزئية في G تقبل القسمة على p ولنفرض أن \mathcal{L} هي مجموعة كل الزمر الجزئية في G والتي كل منها لا يساوي G , لنأخذ من \mathcal{L} العنصر ذو المرتبة الأكبر ولتكن K ولنفرض أن هذه المرتبة هي s أي أن $(K:1) = s$.. ونميز حالتين : p يقسم s , p لا يقسم s
 $p - i$ يقسم s : إذا كان s يقبل القسمة على p فإنه حسب الفرض الاستقرائي تكون K تحوي عنصر مرتبته p وبالتالي فإن G تحوي عنصر مرتبته p .

$p - ii$ لا يقسم s : لنفرض أن s لا يقسم p , بما أن $K \subsetneq G$ عندئذٍ يوجد $x \in G$ بحيث $x \notin K$ ولنأخذ الزمرة الجزئية $T = \langle x \rangle$ ولنفرض أن $(T:1) = t$ بما أن G زمرة تبديلية فإن K, T زمرتين ناظمتين في G ومنه فإن $K \cdot T$ زمرة جزئية في G وأن :

$$K \subsetneq K \cdot T \subseteq G \Rightarrow K \cdot T = G$$

ومنه : (حسب مبرهنة التماثل الثانية)

$$\frac{G}{K} = \frac{K \cdot T}{K} \cong \frac{T}{T \cap K}$$

$$(G:K) = (T:T \cap K)$$

$$(G:1) = (G:K)(K:1)$$

$$(G:1) = (T:T \cap K)(K:1)$$

وبما أن مرتبة G تقبل القسمة على p نجد أن $(T:T \cap K)$ يقبل القسمة على p (لأن $(K:1)$ لا يقبل القسمة على p)

$$(T:1) = (T:T \cap K)(T \cap K:1)$$

وهذا يبين أن $(T:1) = t$ يقبل القسمة على p وحسب الفرض الاستقرائي فإن T تحوي عنصر مرتبته p هو $x^{\frac{t}{p}} \in T$ وكما أن $x^{\frac{t}{p}} \in G$...

نتيجة :

لتكن G زمرة تبديلية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي p , عندئذٍ يوجد في G زمرة جزئية مرتبتها p

... انتهت المحاضرة ...