$\mathrm{Im}\,g \subseteq \mathrm{Im}\,f$ فرضاً

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "h"'] \\ A \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

$\ker f \subseteq \ker g$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C \\ B \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

المحاضرة الثامنة والعشرون

24/12/2013

مبرهنة: إذا كان P مودولاً إسقاطياً فإنه من أجل كل مخطط من التشاكلات المودولية

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "h"'] & C \end{tikzcd}$$ (تامة)

الذي سطره متتالية تامة و يحقق: $h \circ f = 0$

فإنه يوجد تشاكل مودولي $v : P \longrightarrow A$

يحقق $g \circ v = f$

الإثبات: $h \circ f = 0 \rightarrow \mathrm{Im}\,f \subseteq \ker h$

(السطر متتالية تامة) $\rightarrow \mathrm{Im}\,g = \ker h$

وبالتالي $\mathrm{Im}\,f \subseteq \mathrm{Im}\,g$

لنأخذ مخطط

[illegible] B [illegible] Img [illegible]

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f^+"] & \\ A \arrow[r, "g^+"'] & \mathrm{Im}\,g \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$ (تامة)

$f^+(p) = f(p)$ و

$g^+(a) = g(a)$

وكون P إسقاطي فإنه يوجد تشاكل مودولي $v : P \longrightarrow A$ تحقق

$g^+ \circ v = f^+$

وبالتالي: أياً كان $p \in P$ تكون:

$$g \circ v(p) = g(v(p)) = g^+(v(p)) = f^+(p) = f(p)$$

إذن $g \circ v = f$

[illegible]

سؤال دورة

تطبيق: إذا كان $f : A \longrightarrow B$, $g : C \longrightarrow B$ تشاكلين مودوليين وكان C إسقاطي و $\mathrm{Im}\,g \subseteq \mathrm{Im}\,f$ فإنه يوجد تشاكل مودولي $h : C \longrightarrow A$ يحقق: $f \circ h = g$.

نص مسألة الإسقاطية

لنبني المخطط: فيكون سطره متتالية تامة لأن:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "\pi"] & B/\mathrm{Im}\,f \end{tikzcd}$$ (تامة)

إسقاطي

هنا المعادلة لأنه لا شروط علينا f حيث أن f يجب أن تكون متباينة حتى تكون h وحيداً

حتى تكون المتتالية تامة يجب أن تكون $\mathrm{Im}\,f = \ker \pi$ التطبيق

وهذا صحيح لأنه لدينا π الغامر حيث $\ker \pi = \mathrm{Im}\,f$

$$\operatorname{Im} f = \ker \pi$$

$\forall c \in C \quad \pi \circ g(c) = \pi(g(c)) = 0$

$$\operatorname{Im} f \ni$$

$$\Rightarrow \pi \circ g = 0$$

تحققت شروط المبرهنة السابقة ، بالتالي بالاعتماد عليها فإنه يوجد تشاكل مودولي $h : C \longrightarrow A$ ، يحقق :

$$f \circ h = g$$

وهو المطلوب

المودولات الأفقية :

تعريف : ليكن I مودولاً على حلقة R ، نقول عن I أنه أفقي إذا كان من أجل كل متتالية تامة :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B$$

يكون التشاكل : $f^* : \operatorname{Hom}(B, I) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, I)$ غامراً.

مبرهنة : إذا كان I مودولاً على حلقة R فإن القضيتين الآتيتين :

1) I أفقي.

2) من أجل كل مخطط من التشاكلات :

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[d, "g"'] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd} \quad \text{(تامة)}$$

فإنه يوجد تشاكل مودولي $h : B \longrightarrow I$ ، يحقق :

$$h \circ f = g$$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "h"'] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
(إسقاطي) (تامة)

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$
(تامة) (أغماري)

التشاكلات من الأعلى للأسفل — التشاكلات من الأسفل إلى الأعلى

الإثبات:

(2) ⟸ (1): لنأخذ مخططاً من التشاكلات المودولية:

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[d, "g"'] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$
(تامة)

بما أنّ I أغماري فإنّه من أجل المتتالية التامة $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ يكون التشاكل:

$$f^*: Hom(B,I) \longrightarrow Hom(A,I)$$

غامراً.

إذاً مهما كان $g \in Hom(A,I)$ فإنّه يوجد $h \in Hom(B,I)$ بحيث يكون $f^*(h) = g$ أي:

$$h \circ f = g$$

(1) ⟸ (2): إذا كانت المتتالية تامة $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$

لنبرهن على أنّ التشاكل:

$$f^*: Hom(B,I) \longrightarrow Hom(A,I)$$

غامراً.

ليكن $g \in Hom(A,I)$. لنأخذ المخطط:

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$
(تامة)

حسب الفرض يوجد تشاكل $h: B \longrightarrow I$ يحقق:

$$h \circ f = g$$

أي يوجد $h \in Hom(B,I)$ يحقق $f^*(h) = g$ وهذا ينتج أنّ f^* غامر

وهو المطلوب