المحاضرة الثامنة عشرة.   ١٩ /١٢/ ٢٠١٣.

الإشتقاق

1. اشتقاق التوابع المركبة / الضمنية / الوسيطية. 2. قاعدة أوبيتال / أي:
الحالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\frac{0}{0}$ ، $0.\infty$ ، $\infty-\infty$ ، 1^{∞} ، ∞^{0} ، 0^{0} .
3. الاشتقاق من مراتب عليا. 4. نشر الدوال وفق ماكلوران / تايلور.
5. اشتقاق الدوال العكسية . / المثلثية / القطعية العكسية.

1): اشتقاق التوابع المركبة:

$$\left.\begin{array}{l} y=f(u) \\ u=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

مثال:

$$y=\sin x^2$$
$$y'=2x\cdot\cos x^2$$
$$\left.\begin{array}{l} y=\sin u \\ u=x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=\cos \cancel{x}\cdot 2x=\cos x^2\cdot 2x$$

$$\boxed{y'=2x\cdot\cos x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=f(u) \\ u=g(v) \\ v=\varphi(x) \end{array}\right\} \Rightarrow y'=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

مثال:

$$y=\sin(3x+2)^2$$

$$y'=6(3x+2)\cdot\cos(3x+2)^2$$

$$y'=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$y=\sin u\ ,\ u=v^2\ ,\ v=3x+2$$

$$y'=\cos u\cdot 2v\cdot 3$$

$$=\cos v^2\, 2(3x+2)\cdot 3 \Longrightarrow$$

$$\boxed{y'=6(3x+2)\cdot\cos(3x+2)^2}$$

2): اشتقاق التوابع الضمنية:

$$f(x,y)=0$$

مثال

$$x^2+y^3=0$$

أوجد المشتق عند النقطة $(1,-1)$

$$2x+3y^2y'=0$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{2x}{3y^2}\ :\ y\neq 0$$

$$\Longrightarrow y'=-\frac{2(1)}{3(-1)^2}=-\frac{2}{3}$$

$$\boxed{y'(1,-1)=-\frac{2}{3}}$$

3): اشتقاق التابع الوسيطي:

$$\left.\begin{array}{l} x=f(t) \\ y=g(t) \end{array}\right\} \Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$$

ونستخدم غالباً في القطوع والمنحنيات المخروطية والدائرية

مثال:

$$x=\sqrt{t+1}\ ,\ y=\sqrt{3t}$$

أوجد y' عند $t=3$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$=\frac{\frac{3}{2\sqrt{3t}}}{\frac{1}{2\sqrt{t+1}}}=\frac{3\sqrt{t+1}}{\sqrt{3t}}$$

انتهت المحاضرة

ALADID.net

$\Rightarrow y'_{t=3} = \frac{6}{3} = 2$

اذا كان f و g تابعين
معرفين في جوار نقطة a ومحققين الشروط:

①. f و g مستمرين في جوار a وحيث

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

أو:

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \mp\infty$

②. اذا كان f و g قابلين للإشتقاق في هذا الجوار.

③. $g(x)\neq 0$ ، $g'(x)\neq 0$ في هذا الجوار.

④. النهاية $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, $A\in\mathbb{R}$
موجودة أو تساوي $\mp\infty$
عندئذ يمكن أو يمكن أن نكتب

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ عرضية

ويمكن اجراء هذا الإشتقاق عدة مرات اذا تحققت الشروط السابقة.

مثال: حيث لم تحقق شروط أوبيتال:

$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$

حسب أوبيتال

$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1} = ?$

نهائيا:

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1+0 = 1$

$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2\sin x} = \frac{0}{0}$

ان هذا المثال تحقق شروط أوبيتال.

$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\tan^2 x)-1}{1-\cos x} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x(1+\tan^2 x)}{\sin x} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x+2\tan^3 x}{\sin x} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0}\frac{2(1+\tan^2 x)+6\tan^2 x(1+\tan x)}{\cos x}$

$\boxed{=2}$

2. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

3. $\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{\ln x}$

حل هذه الأمثلة
قبل الورقة

$x = e^{\ln x}$

$\lim_{x\to 0^+} x^x$

$\lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x}$

$x\in]0,+\infty[$

$= e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$

$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x}} = \boxed{1}$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

أوجد النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to 0} x\ln x \longrightarrow 0$

2) $\lim_{x\to \infty} x e^{-x} \longrightarrow 0$

3) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) \longrightarrow 0$

4) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}$

5) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right) \longrightarrow -\frac{1}{2}$

6) $\lim_{x\to 0} x^x \longrightarrow 1$

7) $\lim_{x\to 1} (x-1)^{\ln x} \longrightarrow 1$

8) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} \longrightarrow -\frac{1}{3}$

9) $\lim_{x\to 0} (1+m x)^{\frac{1}{x}} \longrightarrow e^{m}$

10) $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} \longrightarrow 0$

11) $\lim (\tan x)^{\tan 2x}$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \; : |x|<1$$

نشر بجوار الصفر.

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

ان نشر الدوال رفقت ماكلوران أي نشرها بجوار الصفر

؛ نشرها رفقت تايلور أي نشرها بجوار a.

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n \quad ; P(0) = a_0$

$P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} \quad ; P'(0) = a_1$

$P''(x) = 2a_2 + 2.3a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} \quad ; P''(0) = 2a_2$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{P''(0)}{2!}$$

$P'''(x) = 2.3a_3 + 2.3.4x + \cdots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} \quad ; P'''(0) = 2.3a_3$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{P'''(0)}{3!}$$

$P^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1\, a_n \quad ; P^{(n)}(0) = n!\, a_n$

وبالتالي أصبحت دالة بالمشتقات:

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n$$