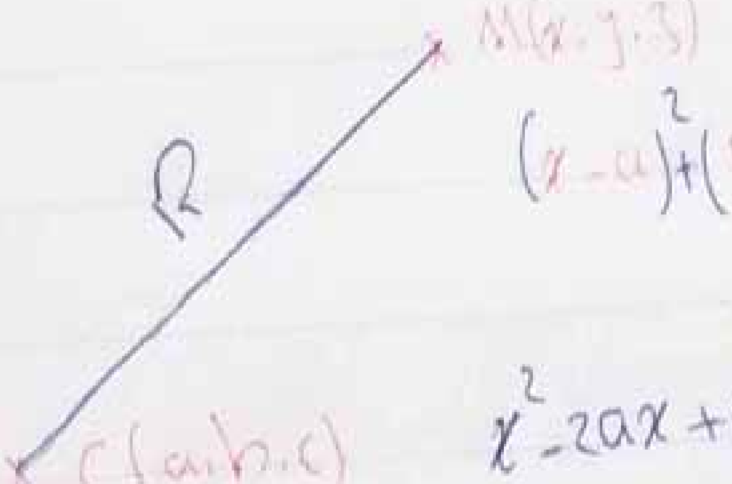
المحاضرة الثانية عشرة 2013/12/17

الكرة:

تعريف: تعرف الكرة بأنها المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ $M(x,y,z)$ المتساوية البعد عن نقطة ثابتة احداثياتها $C(a,b,c)$ في الفراغ الكرة والبعد الثابت يسمى نصف قطر الكرة ويرمز له بالرمز R

انطلاقاً من التعريف: $(\overrightarrow{CM})^2 = R^2$

ومن قانون البعد بين نقطتين:



المعادلة القياسية: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

بفك المطابقات:

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2yb+b^2+z^2-2cz+c^2=R^2$$

نرتب المقادير:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2=0$$

نفرض المقدار $a^2+b^2+c^2-R^2=d$ وعندها نكتب المعادلة بالشكل الآتي:

المعادلة العامة ((النموذجية)) ⊛: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

في الصيغة العامة لمعادلة الكرة: مركزها النقطة التي احداثياتها (a,b,c) نصف قطرها R نسميها بالمعادلة العامة ((النموذجية)). والصيغة قبل النشر في الصيغة القياسية. من ①: $\Leftarrow R^2=a^2+b^2+c^2-d$

ALMOID.net

$\Leftarrow \quad R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

ان المقدار الموجود تحت الجذر يمكن أن يكون موجباً أو سالباً أو صفراً لذلك نميز الحالات التالية:

1) اذا كان $R>0$ فالمعادلة تمثل كرة حقيقية

2) = = $R<0$ فالمعادلة تمثل كرة وهمية أو ((تخيلية))

3) = = $R=0$ = = كرة مجمعة في مركزها أي تمثل نقطة.

- خواص تتميز بها الكرة:

نلاحظ أن المعادلة (*) تمثل معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة للمتحولات (x, y, z) وتتصف بما يلي:

1: أمثال الحدود المربعة متساوية

2: أمثال الحدود المختلطة معدومة. وبالعكس كل معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ (x, y, z) لا تحوي حدود مختلطة تمثل معادلة كرة شريطة أمثال الحدود المربعة متساوية.

[illegible] R

R نصف القطر :

$$\left\{\begin{array}{l} x = R \sin\varphi \cos\theta \\ y = R \sin\varphi \sin\theta \\ z = R \cos\varphi \end{array}\right.$$

اذا كان مركز الكرة مبدأ الإحداثيات. أما اذا كان مركز الكرة النقطة (a,b,c) عندئذ نضع المعادلة بالشكل الآتي:

$$x = a + R.\sin\varphi.\cos\theta \quad (1)$$
$$y = b + R.\sin\varphi.\sin\theta \quad (2)$$
$$z = c + R.\cos\varphi \quad (3)$$

حيث يمكن الانتقال من الشكل الوسيطي للشكل الديكارتي بحذف الوسيطين بالتربيع (1) و(2) و(3) وبالجمع!!

[illegible] ان المعادلة العامة ((المعادلة *)) للكرة تتعين بتعيين الوسطاء (a,b,c,d) فإذا أردنا تعيين كرة تمر بأربع نقاط:

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ $M_2(x_2,y_2,z_2)$ $M_3(x_3,y_3,z_3)$ $M_4(x_4,y_4,z_4)$

ALADIB

نعوض احداثيات هذه النقاط في المعادلة العامة للكرة نحصل على (4) معادلات بأربع مجاهيل وهنا نميز الحالات التالية.

1) لهذه المعادلات حل وحيد عندئذ تتعين الكرة بشكل وحيد.

2) ليس لهذه الجملة حل وعندئذ تكون النقاط الأربعة واقعة في مستوٍ واحد دون أن تقع على محيط دائرة واحدة. اذن لا توجد أي كرة تمر من النقاط الأربع.

3) لهذه المعادلات عدد لانهائي من الحلول عندئذ تكون النقاط الأربع واقعة على محيط دائرة وتكون كل الكرات التي تمر من خلال هذه الدائرة وتمر من احدى هذه النقاط تكون مارة من النقاط المتبقية.

مثال

أوجد معادلة الكرة المارة بالنقاط $M_1(1,-2,-1)$, $M_2(-5,10,-1)$, $M_3(4,1,1)$, $M_4(-8,-2,2)$.

الحل:

نعوض هذه النقاط في المعادلة العامة للكرة نحصل على جملة المعادلات التالية.

$$\left.\begin{aligned}
-2a+4b+2c+d &= -6 \quad \cdots (1)\\
10a-20b+2c+d &= -126 \quad \cdots (2)\\
-8a-2b-22c+d &= -138 \quad \cdots (3)\\
16a+4b-4c+d &= -72 \quad \cdots (4)
\end{aligned}\right\}$$

بحل هذه الجملة نحصل على:

$a=-2$, $b=4$, $c=5$, $d=-36$

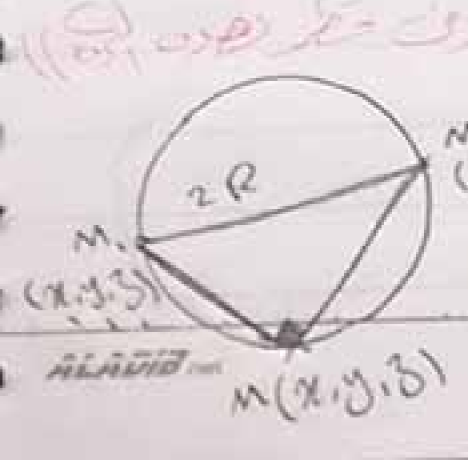
$R=\sqrt{4+16+25+36}=9$

نعوض في المعادلة العامة نحصل على

$$S^*(x,y,z)\equiv(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=81$$

- اوجد معادلة كرة تمر بالنقاط $M_1(1,0,0)$ $M_2(0,2,1)$ $M_3(1/2,1,1/2)$ $M_4(0,0,0)$

- معادلة كرة تمر بنقطتين معلومتين متقابلتين قطرياً ((طرفي قطر معلوم))



نفرض $M(x,y,z)$ نقطة متحولة على سطح الكرة المطلوبة، نفرض جدلاً بأن M تتحول على سطح الكرة. لتكن لدينا النقطتان المعلومتان $M_1(x_1,y_1,z_1)$

$M_2(x_2,y_2,z_2)$

بحيث النقطتان طرفا قطر أي أن $M_1M_2 = 2R$

إذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة من سطح الكرة فالشعاعان $\overline{M_1M_2}$ و $\overline{M_2M}$ متعامدان وتكون المعادلة الشعاعية للكرة $\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_2M} = 0$ وتكتب تحليليا بالشكل التالي: $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$

وبفك الأقواس وترتيب الحدود نحصل على معادلة الكرة المطلوبة

مثال: أوجد معادلة كرة تكون النقطتان $M_1(2,-3,5)$ ، $M_2(4,1,-3)$ طرفي أحد أقطارها؟

الحل: نأخذ النقطة الجارية $M(x,y,z)$ على سطح الكرة المطلوبة

$$(x-2)(x-4)+(y+3)(y-1)+(z-5)(z+3)=0$$

وبفك الأقواس وترتيب الحدود نحصل على معادلة الكرة المطلوبة

[illegible]

ليكن لدينا المستوي ذو المعادلة $Q \equiv px+qy+rz+h=0$ والكرة ذات المعادلة $S^* \equiv x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ فإن المستوي Q إما أن يكون قاطعا أو مماسا أو خارج الكرة وذلك يتوقف على بعد مركز الكرة عن المستوي نرمز للبعد δ ويكون مركز الكرة (a,b,c)

$$\delta = \frac{|pa+qb+rc+h|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

- إذا كان $R<\delta$ فالمستوي خارج الكرة ولا يشترك معها بأية نقطة
- " " $R=\delta$ فالمستوي مماس للكرة.
- " " $\delta<R$ فالمستوي قاطع للكرة والتقاطع هو دائرة معينة إذا أردنا معادلة الدائرة فإننا نكتب $\begin{cases} S^* \\ Q \end{cases}$ معادلة الكرة، معادلة المستوي أما نصف قطرها فهو r ويتعين وفق العلاقة $r^2 = R^2 + \delta^2$

ولإيجاد مركز دائرة التقاطع نقوم بإيجاد معادلة المستقيم المار من مركز الكرة ويعامد المستوي Q ثم نوجد نقطة تقاطع هذا ~~المستوي~~ المستقيم مع المستوي Q

ملاحظة: إذا كان نصف قطر دائرة التقاطع يساوي نصف قطر الكرة وكان لهما المركز نفسه تسمى الدائرة في هذه الحالة دائرة عظمى.

ALADIB

/ /

مثال: بين موضع كل من المستويين $Q_1: x-y+1=0$ ، $Q_2: x-y-z+3=0$
بالنسبة للكرة $S^*: x^2+y^2+z^2-2x+6y+4z+1=0$

الحل: $-2a=-2 \Rightarrow \boxed{a=1}$ ، $-2b=6 \Rightarrow \boxed{b=-3}$ ، $-2c=4 \Rightarrow \boxed{c=-2}$

وبالتالي مركز الكرة هو $C(1,-3,-2)$

نحسب بعد C عن المستوي الأول $= \frac{5}{\sqrt{2}}$

نحسب بعد C عن المستوي الثاني $= \frac{9}{\sqrt{3}}$

وبالتالي $R=\sqrt{13}$ فبالنسبة للمستوي الأول فهو قاطع. حدد نصف قطر دائرة التقاطع.

- بالنسبة للمستوي الثاني فهو خارج الدائرة.

- أثبت أن المستوي Q المعرف بالعلاقة $Q: x+2y+2z+15=0$ يمس الكرة التي معادلتها $S^*: x^2+y^2+z^2-26=0$ ثم عين احداثيات نقطة التماس

لإيجاد احداثيات نقطة التماس نقوم بإيجاد معادلة المستقيم المار من مركز الكرة والعمودي على المستوي ثم نكتبها بالشكل الوسيطي ونوجد تقاطع هذا المستقيم مع المستوي.

الأوضاع النسبية لمستقيم وكرة:

اذا كان لدينا المستقيم D المعين بتقاطع المستويين $D\begin{cases} Q_1: p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0 \\ Q_2: p_2x+q_2y+r_2z+h_2=0 \end{cases}$
ولدينا الكرة $S^*: x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$
لمعرفة وضع المستقيم D بالنسبة للكرة S^* نقوم بحل جملة المعادلات الثلاثة فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لأحد المتحولات (x,y,z)
عندئذ يكون المستقيم إما قاطعاً أو مماساً أو خارج الكرة وذلك حسب ما يكون مميز معادلة الدرجة الثانية، فإذا كان $\Delta>0$ كان المستقيم قاطعاً ونحدد احداثيي نقطتي التقاطع بإيجاد الحل.

- اذا كان $\Delta=0$ عندئذ يكون المستقيم مماساً وبنفس الطريقة نحدد احداثيات نقطة التماس

- اذا كان $\Delta<0$ عندئذ تكون المعادلة مستحيلة الحل وبالتالي لا يوجد نقاط مشتركة بين المستقيم والكرة.

ALADIB.net

مثال: ما وضع المستقيم المعين: $D: \begin{cases} 2x - y + 3z - 12 = 0 \\ 2x - 4y - z + 6 = 0 \end{cases}$ بالنسبة للكرة

$S: x^2+y^2+z^2+2x+2y+4z-43=0$.

بالحل المشترك تنتج المعادلة $z^2-8z+16=0$ ومن أجل هذه المعادلة نجد $\Delta=0$ وبالتالي لها جذر مضاعف.

١٨/١٢/٢٠١٣ المحاضرة الثالثة عشرة.

إذا كان المستقيم معطى وسيطياً نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة الكرة نحصل على معادلة من الدرجة الثانية بالوسيط λ وهنا نميز ثلاث حالات

① : أن يكون مميز هذه المعادلة $\Delta>0$ أي يوجد وسيطان $\Leftarrow$ المستقيم قاطع للكرة ومن أجل تعيين إحداثيات نقطتي التقاطع نحسب λ ثم نعوضها بالمعادلات الوسيطية.

② : إذا كان $\Delta=0$ $\Leftarrow$ أن المعادلة جذر مضاعف أي يوجد قيمة مضاعفة لـ λ وعليه فالمستقيم مماس للكرة ومن أجل إيجاد إحداثيات نقطة التماس نحسب λ ثم نعوضها بالمعادلات الوسيطية.

③ : إذا كان $\Delta<0$ $\Leftarrow$ أن المعادلة مستحيلة الحل أي لا يوجد قيمة حقيقية لـ λ وبالتالي فالمستقيم خارج الكرة.

مثال: ما هو وضع المستقيم المعطى وسيطياً بالمعادلات التالية $x=1+2t$ ، $y=t$ ، $z=1+t$ مع الكرة $S: x^2+y^2+z^2+2x-4y+2z-1=0$

نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة الكرة

$$(1+2t)^2+t^2+(1+t)^2+2(1+2t)-4t+2(1+t)-1=0$$

$$1+4t+4t^2+t^2+1+2t+t^2+2+4t-4t+2+2t-1=0$$

$$6t^2+8t+5=0 \quad \Delta=64-4.5.6=64-120<0$$

فالمستقيم خارج الكرة.

مثال: أثبت أن المستقيم المعطى وسيطياً بالمعادلات التالية: $y=1-t$ ، $x=5+4t$ ، $z=1-t$ يمس الكرة $S: x^2+y^2+z^2=9$ و أوجد نقطة التماس؟