التوابع العقدية الشهيرة:

1 التابع العقدي الصحيح:

بفرض z متحول عقدي عندئذٍ نعرّف التابع العقدي الصحيح كما يلي:

$$w=f(z)=a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

حيث n عدد صحيح موجب و $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ معاملات عقدية
وإذا كان $a_n \neq 0$ نقول أن التابع $f(z)$ من الدرجة n.
نلاحظ أن التابع الصحيح معرّف ومستمر وقابل للاشتقاق عدد لا نهائي من المرات على $\mathbb{C}$ ومشتقة من الشكل:

$$f'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_n z^{n-2} + \cdots + a_1$$

وبالتالي هو تحليلي على $\mathbb{C}$

2 التابع العقدي الكسري:

بفرض z متحول عقدي و $f_1(z), f_2(z)$ تابعان صحيحان من الدرجة n_1, n_2 على الترتيب حيث $f_2(z) \neq 0$ عندئذٍ نعرّف التابع العقدي الكسري كما يلي:

$$w=f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

نلاحظ أن التابع الكسري معرّف على $\mathbb{C}$ باستثناء النقاط التي تعدم المقام أي باستثناء جذور المعادلة $f_2(z)=0$ وعددها n_2 نقطة
كذلك التابع الكسري مستمر وقابل للاشتقاق عدد لا نهائي من المرات على مجموعة تعريفه ومشتقة من الشكل:

$$f'(z)=\frac{f_1'(z)\cdot f_2(z) - f_2'(z)\, f_1(z)}{(f_2(z))^2}$$

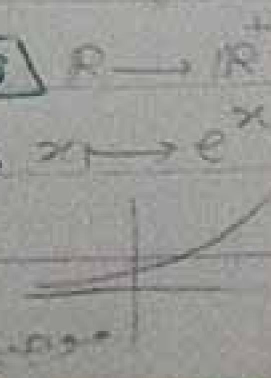
وبالتالي هو تحليلي على مجموعة تعريفه.

3 التابع العقدي الأسي: والمحاضرة من 8

بفرض $z=x+iy$ متحول عقدي عندئذٍ نعرّف التابع الأسي كما يلي:

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$

$x \to e^x$



موجب دوماً

$$w = f(z) = e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} \cdot e^{iy} = e^{x}\cos y + i e^{x}\sin y$$

نلاحظ أنّ
$$u(x,y) = e^{x}\cos y$$
$$v(x,y) = e^{x}\sin y$$

نلاحظ أنّ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x}\cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{x}\sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\Leftarrow$ معادلتي كوشي ـ ريمان محققتان على $\mathbb{C}$ ومنه التّابع الأسّي تحليلي على $\mathbb{C}$ ومشتقه :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^{x}\cos y + i e^{x}\sin y = e^{z}$$

نلاحظ أنّ :

فقط الحقيقي

$$\forall z \in \mathbb{C} : |e^{z}| = |e^{x}||e^{iz}| = e^{x} > 0$$

أمّا التّابع العقدي فقط لاينعدم ومن الممكن أن يكون سالب

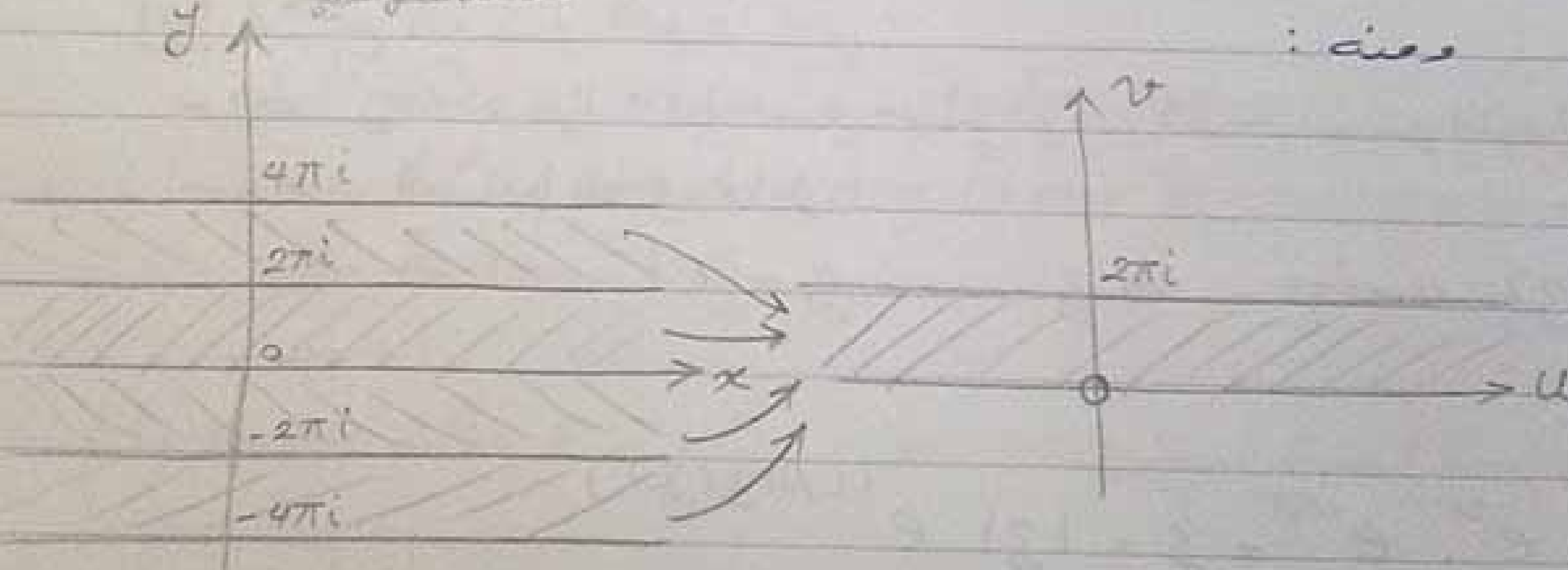
وهذا يعني أنّ التّابع الأسّي لاينعدم .

كذلك فإنّ التّابع الأسّي هو تابع دوري ودوره $2\pi i$ لأنّ :

$$e^{z+2\pi i} = e^{z} \cdot e^{2\pi i} = e^{z}$$

تأكد عالشكل المثلثي

ومنه :



تمرين : اكتب الأعداد العقدية التّالية بالشّكل الجبري :

1) $e^{i+1} = e^{1} \cdot e^{i} = e\cos(1) + i e\sin(1)$

2) $e^{1+\frac{\pi}{4}i} = e \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{e}{\sqrt{2}} \pm \frac{e}{\sqrt{2}}$

3) $e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) $e^{\frac{7\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $e^{\pi i} = -1$

* خواص التابع العقدي الأسي:

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

1) $e^{z_1 + iz_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2 i}$

2) $(e^{z_1})^n = e^{nz_1}$

3) $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$

لم نشترط أن $e^{z_2} \neq 0$
لأن التابع الأسي لا ينعدم وبالتالي هذه العبارة
لا معنى لها.

$\boxed{4}$ التابع العقدي اللوغاريتمي:

بفرض $z = x + iy$ متحول عقدي عندئذٍ نعرّف التابع العقدي اللوغاريتمي بأنه معكوس التابع الأسي كمايلي:

$w = f(z) = u + iv = \ln z \quad ; \quad z = e^{w}$

ومنه:

$$e^{w} = e^{u} \cdot e^{iv} = z = |z| \cdot e^{i(Arg(z))}$$

معروفة

عدد حقيقي
واللوغاريتم معرف

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{u} = |z| \Rightarrow u = \ln |z| \\ v = Arg(z) + 2\pi k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

وبالتالي

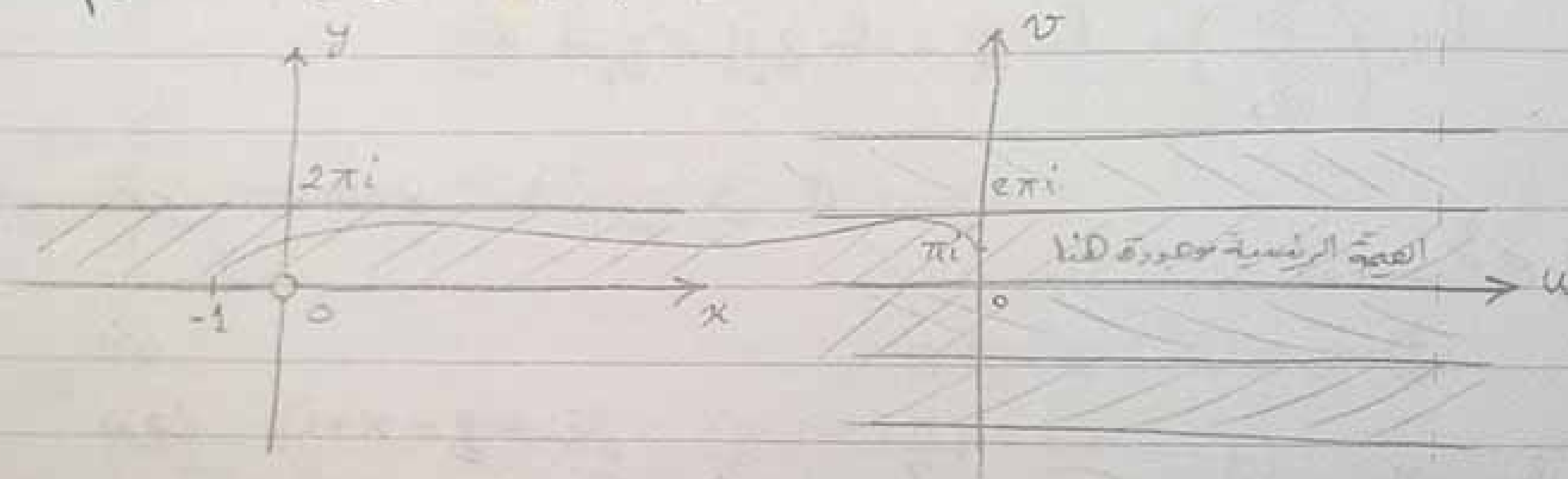
تابع حقيقي معرف عندما يكون داخل اللوغاريتم أكبر تماما من الصفر

معرف دوما

«للحفظ» $$\boxed{\ln z = \ln|z| + i\left(Arg(z) + 2\pi k\right) \;;\; k \in \mathbb{Z}}$$

- نلاحظ أن مجموعة تعريف التابع اللوغاريتمي هي $\mathbb{C}^*$
- كذلك التابع اللوغاريتمي هو تابع متعدد القيم أي لكل عدد عقدي عدد غير منته من اللوغاريتمات

لكن عندما $k=0$ نحصل على ما يسمى بالقيمة الرئيسية للوغاريتم



كذلك التابع اللوغاريتمي قابل للاشتقاق على $\mathbb{C}^*$ ومشتقه:

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}$$

$\ln(1)$
$=0$

تمرين: اكتب اللوغاريتمات التالية بالقيمة الرئيسية بالشكل الجبري:

1) $\ln(1+i) = \ln|1+i| + i\left(Arg(1+i)\right)$
$= \ln\sqrt{2} + i\dfrac{\pi}{4}$

2) $\ln(1+\sqrt{3}\,i) = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{3}$ (القيمة الرئيسية الزاوية بين 0 و 2π)

3) $\ln(i) = \ln|i| + \dfrac{\pi}{2}i = \dfrac{\pi}{2}i$

4) $\ln(-1) = \ln|-1| + \pi i = \pi i$

* خواص التابع اللوغاريتمي:

$\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$:

① $\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$

$\ln(z_1)^n = n \ln(z_1) \; ; n \in \mathbb{N}$

$\ln\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2 \; ; z_2 \neq 0$

تمرين: حل المعادلات التالية في $\mathbb{C}$:

$\boxed{1}$ $e^{z} = 1 + i$

الحل:

نفرض $z = x + iy$ عندئذٍ:

$$e^{z} = e^{x} \cdot e^{iy} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \begin{cases} e^{x} = \sqrt{2} \Rightarrow x = \ln\sqrt{2} \\ e^{iy} = e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ومنه:

$$\boxed{z = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) ; \; k \in \mathbb{Z}}$$

عدد غير منتهي من الحلول

طريقة ثانية للحل: نأخذ لوغاريتم الطرفين وبالتالي نجد:

$$z = \ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

$\boxed{2}$ $\ln z = 1 + \pi i$

$$\rightarrow \ln z = \ln|z| + i(\text{Arg}(z) + 2\pi k) = 1 + \pi i \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \ln|z| = 1 \rightarrow |z| = e \\ \text{Arg}(z) + 2\pi k = \pi \rightarrow \text{Arg}(z) = \pi(1 - 2k) \end{cases}$$

دوري

π صوضحة

وسط الدائرة على

محورها

$$\rightarrow \boxed{z = -e}$$

سؤال

$z = |z| e^{\theta} = e \cdot e^{\pi(1-2k)}$

$$\lim_{n \to 0} (1+n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

طريقة ثانية: نأخذ e للطرفين فنجد:

$$z = e^{1+\pi i} = -e$$

* وظيفة ①: اكتب الأعداد العقدية التالية بالشكل الجبري:

$\boxed{1}$ $e^{\ln 2 - \frac{\pi}{3} i}$

$\boxed{2}$ $e^{1 - \frac{\pi}{2} i}$

$\boxed{3}$ $e^{-2 + \frac{\pi}{2} i}$

$\boxed{4}$ $\ln(-4)$

سؤال: هنا لم يتم ذكر القيمة الرئيسية فهل نهتم لذلك؟؟

$\boxed{5}$ $\ln(3+\sqrt{3}\, i)$

② حل المعادلات التالية في $\mathbb{C}$:

$\boxed{1}$ $e^{2z} + 1 = 0$

$\boxed{2}$ $\ln z(z+2) - \pi i = 0$

③ أثبت أن أيا كان:

$$a \in \mathbb{C} : (e^{az})' = a\, e^{az}$$

لنستفيد من معادلتي كوشي ريمان

الحل: ①

$\boxed{1}$ $e^{\ln 2 - \frac{\pi}{3} i} = e^{\ln 2} \cdot e^{-\frac{\pi}{3} i}$

$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 1 - \sqrt{3}\, i$

$\boxed{2}$ $e^{1 - \frac{\pi}{2} i} = e^1 \cdot e^{-\frac{\pi}{2} i} = e\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = e(0 - i) = -e i$

$\boxed{3}$ $e^{-2 + \frac{\pi}{2} i} = e^{-2} \cdot e^{\frac{\pi}{2} i} = \frac{1}{e^2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e^2}(0 + i) = \frac{1}{e^2} i$

$\boxed{4}$ $\ln(-4) = \ln|-4| + i(\mathrm{Arg}(-4) + 2\pi k) \; ; k \in \mathbb{Z}$

$= \ln 4 + (\pi + 2\pi k) i \; ; k \in \mathbb{Z}$

($k=0$ قيمة رئيسية)