الـ P - زمر

تعريف : لتكن G زمرة وليكن $a, b \in G$
نقول إنّ a, b مترافقان إذا وجد $x \in G$ بحيث $b = xax^{-1}$
وينتج عن ذلك بأنّ كل عنصر مترافق مع نفسه لأنّ $e \in G$ بحيث $a = eae^{-1}$
نرمز لمجموعة العناصر المترافقة مع a بالشكل: $CL(a) = \{ xax^{-1} : x \in G \}$ صف ترافق العنصر a

تمهيدية : لتكن G زمرة , لنعرف على G علاقة ρ بالشكل :

$$\forall\, a, b \in G\ ;\ a\rho b \iff \exists\, x \in G : b = xax^{-1}$$

عندئذٍ : 1 - العلاقة ρ هي علاقة تكافؤ على G .
2 - صفوف تكافؤ العلاقة ρ هي صفوف الترافق $CL(a)$ وذلك $\forall a \in G$.
3 - المجموعة $\{ CL(a) : a \in G \}$ تشكل تجزئة للزمرة G .

تمهيدية : لتكن G زمرة وليكن $a \in G$ عندئذٍ :
1 - المجموعة $C(a) = \{ x : x \in G \quad xa = xa \}$ تشكل زمرة جزئية في G .
2 - لنفرض أنّ $M_L\big(C(a)\big)$ مجموعة المرافقات اليسارية للزمرة $C(a)$ عندئذٍ :

$$Card\ CL(a) = Card\ M_L\big(C(a)\big)$$

3 - $$Card\ CL(a) = \big(G : C(a)\big)$$

البرهان : 1 - بما أنّ $ea = ae$ يكون $e \in C(a)$ ومنه $C(a) \neq \emptyset$, بفرض $x, y \in C(a)$

$$xa = ax \ \wedge \ ya = ay$$

$$(xy^{-1})a = x(y^{-1}a) = x(ay^{-1}) = (xa)y^{-1} = a(xy^{-1}) \Longrightarrow xy^{-1} \in C(a)$$

ومنه $C(a)$ زمرة جزئية في G .

2 - لنعرف العلاقة : $f : CL(a) \longrightarrow M_L\big(C(a)\big)$

$$xax^{-1} \in CL(a) \ ; \ f(xax^{-1}) = x \cdot C(a)$$

ليكن $xax^{-1}, yay^{-1} \in CL(a)$ فنجد أنّ f تطبيق متباين لأنّ :

$$xax^{-1} = yay^{-1} \iff y^{-1}xax^{-1}y = y^{-1}xa(y^{-1}x)^{-1} = a \iff (y^{-1}x)a = a(y^{-1}x)$$

$$\Leftrightarrow y^{-1}x \in C(a) \Leftrightarrow y^{-1}x \cdot C(a) = C(a) \Leftrightarrow x \cdot C(a) = y \cdot C(a)$$

$$\Leftrightarrow f(xax^{-1}) = f(yay^{-1})$$

بفرض $z \in G$, $z \cdot C(a) \in M_L\big(C(a)\big)$

$$zaz^{-1} \in CL(a) \quad , \quad f(zaz^{-1}) = z \cdot C(a)$$

ومنه فإنّ f غامر ومما سبق يكون f تقابل ومنه $Card\ CL(a) = Card\ M_L\big(C(a)\big)$

3 - واضح لأنّ دليل $C(a)$ في G هو عدد المرافقات اليسارية (اليمينية) لـ $C(a)$ في G .

مبرهنة : لأجل أي زمرة منتهية G فإنّ العلاقة الآتية صحيحة وهي :

$$(G:1) = Card\ CL(a) = \sum\big(G:C(a)\big)$$

والتي تسمى علاقة الصفوف , حيث أنّ المجموع في هذه المساواة مأخوذ على العناصر الممثلة لصفوف الترافق

تمهيدية : لتكن G زمرة و $a \in G$, الشروط الآتية متكافئة :

1 - $a \in \mathbb{Z}(G)$ 2 - $Card\ CL(a) = 1$ 3 - $CL(a) = \{a\}$

(1 $\Leftarrow$ 2) : لنفرض أنّ $a \in \mathbb{Z}(G)$, ليكن $b \in CL(a)$ عندئذٍ يوجد $x \in G$ بحيث $b = xax^{-1}$

$$b = xax^{-1} = axx^{-1} = a \Longrightarrow CL(a) = \{a\} \Longrightarrow Card\ CL(a) = 1$$

(2 $\Leftarrow$ 3) : واضح

(3 $\Leftarrow$ 1) : لنفرض أنّ $CL(a) = \{a\}$ عندئذٍ :

$$\forall\, x \in G \ ; \ xax^{-1} = a \Longrightarrow xa = ax \Longrightarrow a \in \mathbb{Z}(G)$$

تعريف :

لتكن G زمرة منتهية و p عدد أولي نقول إنّ G زمرة P - إذا كان $(G:1) = p^n$ بحيث $n \in \mathbb{N}$

مبرهنة : لتكن G زمرة منتهية , إذا كانت G هي P - زمرة عندئذٍ : $\mathbb{Z}(G) \neq \langle e \rangle$

الإثبات : لنفرض أنّ $(G:1) = p^n$ حيث أنّ p عدد أولي , لدينا حسب علاقة الصفوف

$$(G:1) = \sum\big(G:C(a)\big)$$

$$(G:1) = \sum_{a \in \mathbb{Z}(G)} \big(G:C(a)\big) + \sum_{a \notin \mathbb{Z}(G)} \big(G:C(a)\big)$$

$$p^n = Card\ \mathbb{Z}(G) + \sum_{a \notin \mathbb{Z}(G)} \big(G:C(a)\big)$$

بما أنّ $C(a)$ زمرة جزئية في G فإنّ مرتبتها تقسم مرتبة G ومنه :

$$\big(G:C(a)\big)=\frac{(G:1)}{(C(a):1)}$$

$$(C(a):1)=p^r \quad : \quad 1\le r\le n$$

$$\big(G:C(a)\big)=\frac{p^n}{p^r}=p^{n-r}$$

وهذا يبين أنّ $\big(G:C(a)\big)$ يقبل القسمة على p ومنه $\sum_{a\notin\mathbb{Z}(G)}\big(G:C(a)\big)$ يقبل القسمة على p

$$\big(\mathbb{Z}(\mathrm{G}):1\big)=p^n-\sum_{a\notin\mathbb{Z}(G)}\big(G:C(a)\big)$$

وبالتالي فإنّ $(\mathbb{Z}(G):1)$ تقبل القسمة على p وبالتالي تكون $\mathbb{Z}(G)$ هي زمرة تبديلية منتهية ومرتبتها تقبل القسمة على p ومنه فإنّ $\mathbb{Z}(G)$ تحوي عنصر مرتبته p وبالتالي $\mathbb{Z}(G)\neq\langle e\rangle$.

مبرهنة : لتكن G زمرة منتهية وليكن p عدد أولي , إذا كانت $(G:1)=p^2$ تكون G تبديلية .

الإثبات :إذا كانت $G=\mathbb{Z}(G)$ تكون تبديلية

بما أنّ G هي P ـ زمرة فإنّ $\mathbb{Z}(G)\neq\langle e\rangle$ ومنه نجد إما $(\mathbb{Z}(G):1)=p$ أو $\big(\mathbb{Z}(G):1\big)=p^2$

إذا كان $(\mathbb{Z}(G):1)=p^2$ عندئذٍ $G=\mathbb{Z}(G)$ ومنه تكون G تبديلية .. لنفرض أنّ $\big(\mathbb{Z}(G):1\big)=p$

عندئذٍ : $\frac{(G:1)}{(\mathbb{Z}(G):1)}=\big(G:\mathbb{Z}(G)\big)=p$

وبما أنّ $\mathbb{Z}(G)$ ناظمية في G فإنّ مرتبة زمرة الخارج $\frac{G}{\mathbb{Z}(G)}$ تساوي p ومنه تكون زمرة الخارج دوارة وحسب مبرهنة سابقة تكون G تبديلية .

تمهيدية : لتكن G زمرة منتهية و H زمرة جزئية ناظمية في G , الشروط الآتية متكافئة :

1 - الزمرة G هي P ـ زمرة .

2 - كلاً من H و G/H تكون P ـ زمرة .

الإثبات : $(1 \Leftarrow 2)$: ليكن p عدد أولي وليكن $(G:1) = p^n$

بما أنّ $(H:1), (G:H)$ يقسمان p^n فإنّ :

$$\left.\begin{matrix} (H:1) = p^s & : & 1 \leq s \leq n \\ (G:H) = p^t & : & 1 \leq t \leq n \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \text{كلاً من } H \text{ , } \frac{G}{H} \text{ تكون } P \text{ - زمرة}$$

$(2 \Leftarrow 1)$: لنفرض أنّ

$$(H:1) = p^s \quad , \quad \left(\frac{G}{H}:1\right) = p^t$$

$$(G:1) = (G:H)(H:1) = p^t \cdot p^s$$

$$(G:1) = p^{t+s} = p^m \quad : \quad m \in \mathbb{N}$$

ومنه تكون G هي P - زمرة .

مبرهنة سيلوف الأولى : لتكن G زمرة منتهية مرتبتها تقبل القسمة على p^n حيث p عدد أولي , n عدد صحيح موجب عندئذٍ : يوجد في G عنصر مرتبته p^n

بمعنى مكافئ :

لتكن G زمرة منتهية مرتبتها تقبل القسمة على p^n حيث p عدد أولي , n عدد صحيح موجب عندئذٍ : الزمرة G تحوي زمرة مرتبتها p^n

... انتهت المحاضرة ...

انتهى المقرر بعونه تعالى

نسألُ الله أنْ تكون قد تمَّت الإفادة ... والله وليُّ التوفيق