المحاضرة الثانية والعشرون

6 التوابع العقدية القطعية :

بفرض $z = x + iy$ متحول عقدي عندئذٍ نعرّف التوابع القطعية كما يلي :

$$ch\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \;,\; sh\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$tgh\, z = \frac{sh\, z}{ch\, z} \;,\; Coth\, z = \frac{ch\, z}{sh\, z}$$ (دورها πi)

نلاحظ أنّ التوابع القطعية دورية ودور كل منها $2\pi i$ كذلك قابلة للاشتقاق على $\mathbb{C}$ حيث : $(sh\,z$ و $ch\,z)$ فقط

$$(ch\, z)' = sh\, z \;,\; (sh\, z)' = ch\, z$$

$$(tg\,h\, z)' = \frac{1}{ch^2 z} \;,\; (cotg\,h\, z)' = \frac{1}{sh^2 z}$$

وبالتالي هي توابع تحليلية على $\mathbb{C}$

تمرين: اكتب الأعداد العقدية التالية بالشكل الجبري :

1) $ch(1 + \frac{\pi}{3} i)$

$$ch(1 + \frac{\pi}{3} i) = \frac{e^{1+\frac{\pi}{3}i} + e^{-(1+\frac{\pi}{3}i)}}{2} = \frac{1}{2}\left[e\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) + \frac{1}{e}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right]$$

$$= \left(\frac{e}{4} + \frac{1}{4e}\right) + \left(\frac{e\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4e}\right) i$$

2) $ch(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{2}{2} = 1$

3) $sh(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = \frac{0}{2} = 0$

$\boxed{4}$ $ch\left(\frac{\pi}{2}i\right) = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}i} + e^{-\frac{\pi}{2}i}}{2} = 0$

$\boxed{5}$ $sh\left(\frac{\pi}{2}i\right) = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}i} - e^{-\frac{\pi}{2}i}}{2} = i$

تمرين: أثبت أنه أيا كان $z \in \mathbb{C}$ فإنه :

$$\forall z \in \mathbb{C} : ch^2 z - sh^2 z = 1$$

7 التوابع العقدية من الشكل:

$$w = f(z) = z^a \quad ; \quad a \in \mathbb{C}$$

بفرض z متحول عقدي و a ثابت عقدي عندئذ:

$$w = f(z) = z^a = e^{\ln z^a} = e^{a \ln z}$$

ومنه:

$$\boxed{z^a = e^{a[\ln|z| + i(Arg(z) + 2\pi k)]} \quad ; k \in \mathbb{Z}}$$

للحفظ

نلاحظ أن هذا التابع متعدد القيم لكن عندما $k=0$ نحصل على القيمة الرئيسية كذلك هو تابع قابل للاشتقاق ومشتقه:

التابع متعدد القيم ليس تابع ولكن عند القيمة الرئيسية $k=0$ يصبح تابع

$$(z^a)' = \frac{a}{z} z^a = a \cdot z^{a-1}$$

تمرين: اكتب الأعداد العقدية التالية بالقيمة الرئيسية بالشكل الجبري:

1

$$3^{(1+i)} = e^{(1+i)[\ln|3| + i(0 + 2\pi k)]} \quad ; k = 0$$

$$= e^{(1+i)\ln 3} = e^{\ln 3} \cdot e^{i \ln 3}$$

$$= 3\cos \ln 3 + i\, 3 \sin \ln 3$$

2

$$i^{(1+i)} = e^{(1+i)[\ln|3| + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)]} \quad ; k = 0$$

$$= e^{(1+i)(i\frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2}} = \frac{i}{e^{\frac{\pi}{2}}}$$

3

$$(1+i)^i = e^{i[\ln|1+i| + i(\underbrace{Arg(1+i)}_{\frac{\pi}{4}} + 2\pi k)]} \quad ; k = 0$$

$$= e^{i[\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} i]} = e^{-\frac{\pi}{4} + i \ln\sqrt{2}}$$

$$= e^{-\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i \ln\sqrt{2}}$$

$$= e^{-\frac{\pi}{4}}\left(\cos(\ln\sqrt{2}) + i\sin(\ln\sqrt{2})\right)$$

$$= \frac{\cos(\ln\sqrt{2})}{e^{\frac{\pi}{4}}} + i\,\frac{\sin(\ln\sqrt{2})}{e^{\frac{\pi}{4}}}$$

$\boxed{4}$ $$(3)^2 = e^{2(\ln|3| + i(0+2\pi k))} \quad ; k=0$$

$$= e^{2\ln 3} = 9$$

$\boxed{5}$ $$(4)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}[\ln|4| + i(0+2\pi k)]} \quad ; k=0$$

$$= e^{\frac{1}{2}(\ln 4)} = 2$$

$\boxed{6}$ $$(-4)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}[\ln|-4| + i(\pi+2\pi k)]} \quad ; k=0$$

$$= e^{\frac{1}{2}[\ln 4 + \pi i]} = e^{\frac{1}{2}\ln 4 + \frac{i\pi}{2}} = 2i$$

$\boxed{7}$ $$(8)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}[\ln|8| + i(0+2\pi k)]} \quad ; k=0$$

$$= e^{\frac{2}{3}\ln 8} = 4$$

$\boxed{8}$ $$(8)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}[\ln|8| + i(0+2\pi k)]} \quad ; k=0$$

$$= e^{\sqrt{2}\ln 8}$$

8 التوابع العقدية من الشكل:

$$w = f(z) = a^{z} \quad ; \quad a \in \mathbb{C}$$

بفرض z متحول عقدي و a ثابت عقدي عندئذٍ:

$$w = f(z) = a^{z}$$

$$= e^{\ln a^{z}} = e^{\ln a \cdot z}$$

ومنه:

للحفظ

$$\boxed{a^{z} = e^{z[\ln|a| + i(\operatorname{Arg}(a) + 2\pi k]} \quad ; k \in \mathbb{Z}}$$

نلاحظ أن هذا التابع متعدد القيم لكن عندما $k = 0$ نحصل على القيمة الرئيسية
كذلك هو تابع قابل للاشتقاق ومشتقته:

$$(a^{z})' = (e^{z \ln a})' = \ln a \cdot a^{z}.$$

$$\frac{a^{z}}{\ln a}$$

تمارين خفيفة

اكتب الأعداد العقدية التالية بالشكل الجبري:

1. $ch(1 + \pi i)$
2. $sh(1 + \pi i)$
3. $(1+i)^{(1+i)}$