المحاضرة الرابعة والعشرون والأخيرة

6) أوجد قرص التقارب لمتسلسلات القوى التالية :

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (z-i)^n$

ملاحظة

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

عودة للحل :

$a_n = 1 \ , \ z_0 = i$

وبالتالي قرص التقارب

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = 1$$

⟸ قرص التقارب $D(i, 1)$

ملاحظة ◄ الشكل العام لمتسلسلة القوى :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

أمثال المتسلسلة ← ، مركز المتسلسلة

• متسلسلة القوى دائماً متقاربة في مركزها على الأقل.

•• مركز قرص التقارب هو نفسه مركز المتسلسلة

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}$

هي متسلسلة قوى مركزها $z_0 = i$

متتالية الأمثال حدها العام هو:

$$a_n = \frac{1}{(1-i)^{n+1}}$$

← لو كانت هذه المتتالية في البسط لكانت قرص التقارب سيصغر

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{|(1-i)^{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(\sqrt{1+1})^{n+1}}$$

$$= \sqrt{2}$$

⟸ قرص التقارب $D(i, \sqrt{2})$

$n+1$ هي نفسها n عندما $n \to \infty$

$\boxed{3}$ $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n^n}$$

$$a_n = \frac{1}{n^n} \quad , \quad z_0 = -1$$

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \infty$$

وبالتالي قرص التقارب هو $\mathbb{C}$

$\boxed{4}$ $$\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(z+1+2i)^n$$

$$a_n = n! \quad , \quad z_0 = -1-2i$$

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

ومنه المتسلسلة متقاربة عند مركزها $z_0 = -1-2i$

ملاحظة : $n!$ متسلسلة سريعة جداً ولكن n^n أسرع .

6) أثبت أن متسلسلة الجداء التالية متقاربة :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+i}{n^3+n+1} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i \cos n\pi}{\ln(n^2+2)} \right)$$

I , II

ثم أوجد الحد العام لمتسلسلة الجداء حسب كوشي .

تذكرة : بفرض $f_1(n), f_2(n)$ كثيري حدود من الدرجة n_1, n_2 على الترتيب عندئذٍ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_1(n)}{f_2(n)} \begin{cases} \text{متقاربة إذا كان } n_2 - n_1 > 1 \\ \text{متباعدة إذا كان } n_2 - n_1 \leq 1 \end{cases}$$

ملاحظة: المتسلسلة الريمانية $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

إذا كان $\alpha > 1$ متقاربة

$\alpha \leq 1$ متباعدة

أمّا المتتاليات فتكون المتتالية متقاربة إذا كانت درجة البسط أصغر أو تساوي درجة المقام، أمّا إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام فستكون متباعدة

← عودة للحل: $(-1)^n = \cos n\pi$

نلاحظ أنّ (I) متقاربة بالإطلاق.

(II) متقاربة حسب ليبنز

ومنه حسب مبرهنة ميرتن فإنّ متسلسلة الجداء متقاربة ومنه الحد العام لمتسلسلة الجداء:

$$P_n = \sum_{k=0}^{\infty} z_k \cdot \omega_{n-k}$$

$$= \sum \left(\frac{k+i}{k^3+k+1}\right) \cdot \left(\frac{i(-1)^{n-k}}{\ln((n-k)^2+2)}\right)$$

8) أثبت أنّ التابع $u = u(x,y) = e^x \cos y$ توافقي ثم أوجد مرافق توافقي له $v = v(x,y)$ بحيث يكون التابع $f = u + iv$ تحليلي.

الحل:

يكون التابع $u = u(x,y)$ توافقي إذا حقق معادلة لابلاس:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots\ldots \star$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cos y$$

بالتعويض في $\star$ نجد:

$$e^x \cos y + (-e^x \cos y) = 0$$

وبالتالي معادلة لابلاس محققة ← $u = u(x,y)$ توافقي.

لإيجاد المرافق التوافقي $v = v(x,y)$ الذي من أجله يكون f تحليلي نقوم بما يلي:

لنأخذ معادلتي كوشي ريمان:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \quad \ldots\ldots \text{①}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \quad \ldots\ldots \text{②}$$

من ① نكامل بالنسبة لـ y:

$$v = e^x \sin y + g(x)$$

نشتق بالنسبة لـ x فنجد:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y + g'(x)$$

بالمقارنة مع ② نجد:

$$e^x \sin y + g'(x) = e^x \sin y \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = C$$

$$\rightarrow \boxed{v = e^x \sin y + C}$$

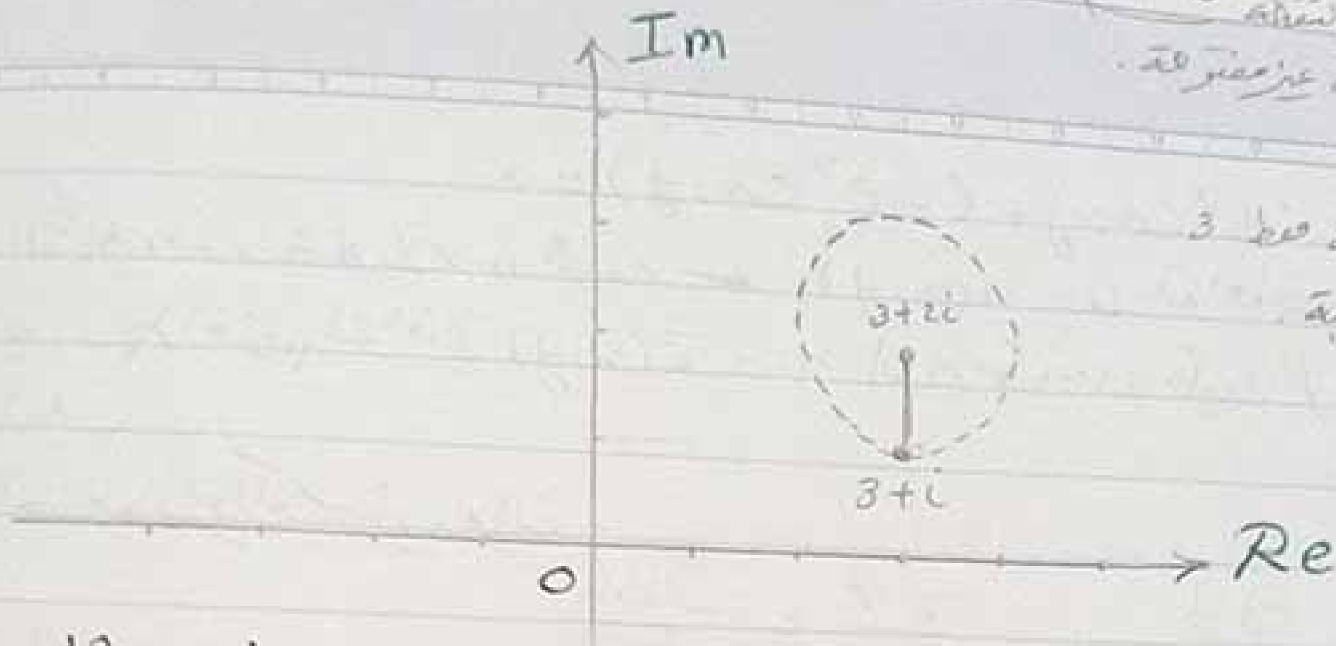
$$\rightarrow (u,v) = e^x \cos y + i(e^x \sin y + C)$$
$$= u + iv = f$$

9) مثل المجموعات التالية هندسياً في المستوي العقدي ثم ادرسها طبولوجياً:

$$A_1 = D(3+2i, 1) \cup [3+i, 3+2i]$$

إن D هي القرص المفتوح الذي مركزه $3+2i$ ونصف قطره 1.

القاطع هو ملاصقة ولا تنتمي
غير مفتوحة لأن النقطة
القطعة مستقيمة غير مفتوحة.



لو كان بدل 3+i فقط 3
ستكون غير محدبة

إن المجموعة A_1 غير مفتوحة لسبب وجود النقطة $3+i$ [ليست داخلية في A_1] وغير مغلقة لأن النقطة $(2+2i)$ ملاصقة ولا تنتمي للمجموعة وليست منطقة لأنها غير مفتوحة كما أنها محدبة ومترابطة ومحدودة لأننا لو أخذنا القرص المفتوح الذي مركزه 0 ونصف قطره 10 عندئذٍ سيكون $A_1 \subseteq D(0,10)$

لو كان < نحصل على قرص مفتوح

$$A_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| \leq |1 - \frac{1}{2}\bar{z}|\}$$

لو كان ≥ سنحصل على خارج القرص وكذا مع محيط القرص.

الحل:

نفرض أن: $z = x + iy \leftarrow \bar{z} = x - iy$

$$|z - \frac{1}{2}| \leq |1 - \frac{1}{2}\bar{z}|$$

$$\rightarrow |x + iy - \frac{1}{2}| \leq |1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}iy|$$

$$\rightarrow |(x - \frac{1}{2}) + iy| \leq |(1 - \frac{1}{2}x) + i(\frac{1}{2}y)|$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq (1 - \frac{x}{2})^2 + \frac{y^2}{4}$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 \leq 1 - x + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$$

$$\frac{3x^2}{4} + \frac{3y^2}{4} \leq \frac{3}{4} \rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\rightarrow |z|^2 \leq 1 \rightarrow |z| \leq 1 \rightarrow A_2 = \bar{D}(0, 1)$$

الدراسة على الطالب

$A_3 = \{ z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 2 + Im\, z \leq 2 \}$

الحل: نأخذ المتراجحتين:

ندرس كل واحدة على حدا ثم نأخذ التقاطع.

$|z| \leq 2 + Im\, z$ ------- ①

$2 + Im\, z \leq 2$ ------- ②

من ② نجد أنّ $2 + Im\, z \leq 2 \Rightarrow y \leq 0$

من ① نجد أنّ:

$$|z| \leq 2 + Im\, z$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq 2 + y \Rightarrow x^2 + y^2 \leq (2+y)^2$$

$$x^2 + y^2 \leq 4 + 4y + y^2$$

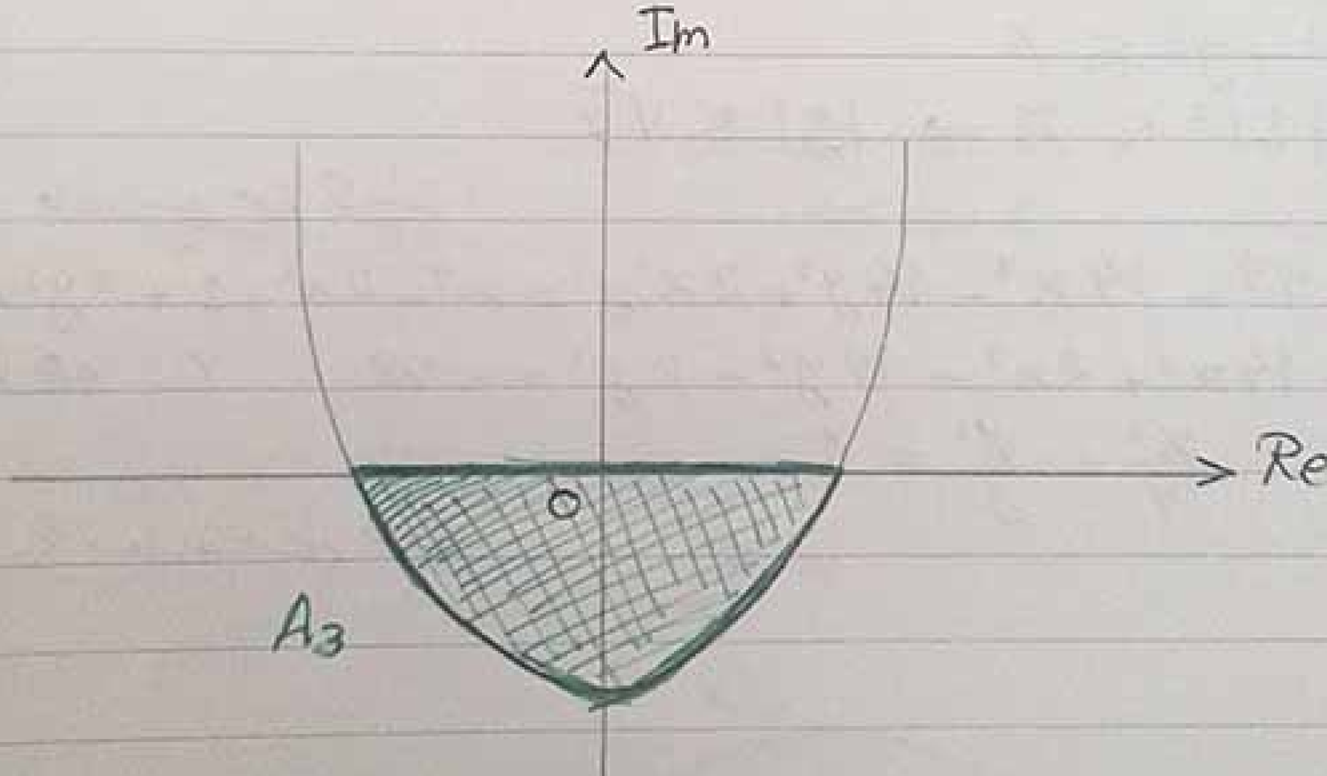
$$x^2 - 4 - 4y \leq 0$$

نضع

$$x^2 - 4 - 4y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 4(y+1)$$

وهي معادلة قطع مكافئ.



A_3 مجموعة غير مفتوحة و هي مغلقة و محدبة ومترابطة و محدودة وغير منطقة لأنها غير مفتوحة و هي وحيدة الترابط

يجب تمثيل كل واحدة في الامتحان

Be careful

$$A_5 = \{ z \in \mathbb{C} : |z-1| + |z+1| = 4 \}$$

الحل : بفرض $z = x+iy$ ومنه

$$z - 1 = (x-1) + i(y)$$

$$z + 1 = (x+1) + i(y)$$

$$\Rightarrow |z-1| + |z+1| = 4$$

$$\rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 4$$

بتربيع طرفي المعادلة نجد :

$$2x^2 + 2 + 2y^2 + 2\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 + 2y^2x^2 + 2y^2 + y^4} = 16$$

$$x^2 + y^2 - 7 = -\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 + 2y^2x^2 + 2y^2 + y^4}$$

يجب أن يكون

$$x^2 + y^2 - 7 \leqslant 0$$

$$x^2 + y^2 \leqslant 7$$

$$|z|^2 \leqslant 7 \Rightarrow |z| \leqslant \sqrt{7}$$

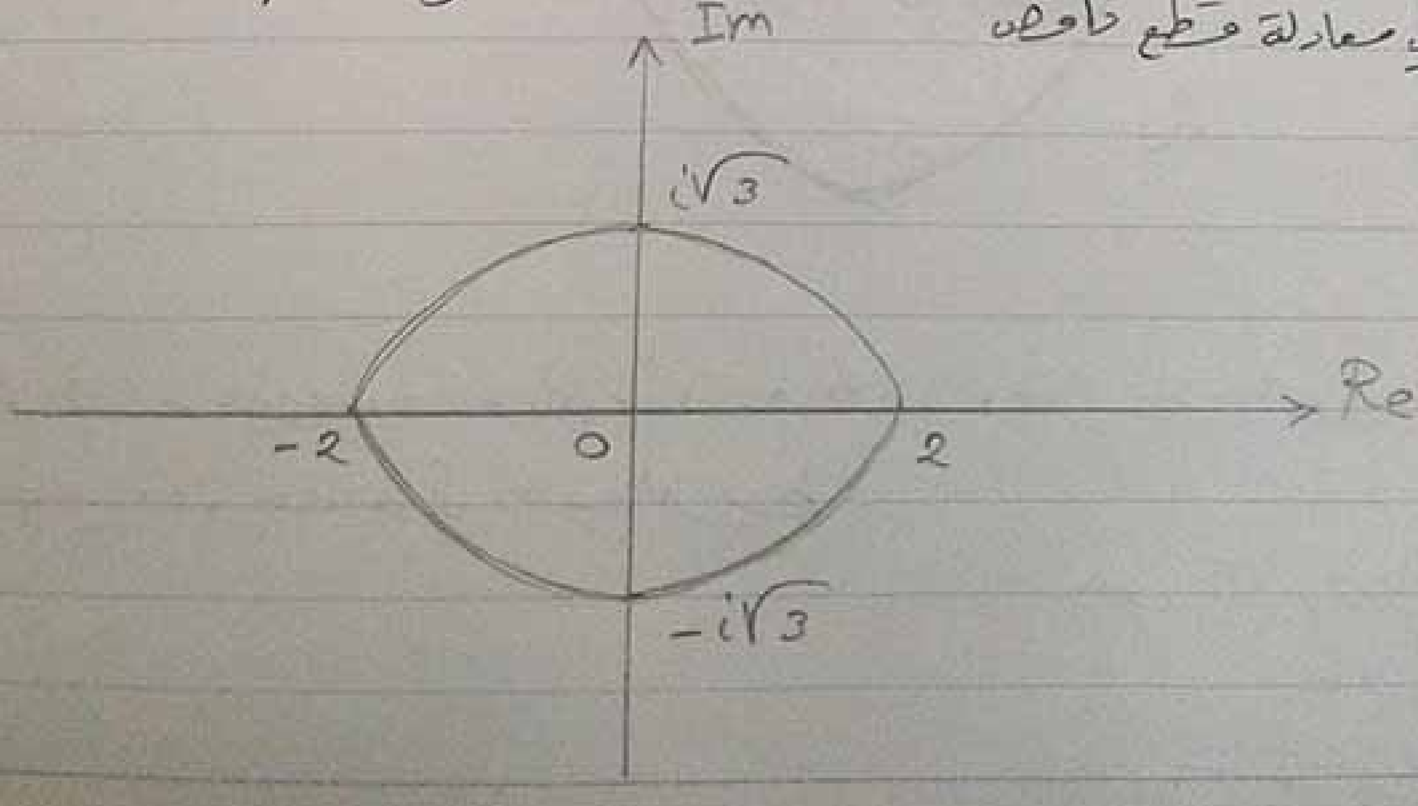
بالتربيع مرة ثانية :

$$x^4 + y^4 + 49 - 14x^2 - 14y^2 + 2x^2y^2 = x^4 - 2x^2 + 1 + 2y^2x^2 + 2y^2 + y^4$$

$$-14x^2 + 2x^2 - 14y^2 - 2y^2 = -48 \qquad (\div 48)$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

وهي معادلة قطع ناقص



A5 : * غيرمفتوحة
* مغلقة
* محدودة
* ليست محدبة
* ليست منتظمة
* مترابطة

ملاحظات: مبرهنة ميرتن محذوف برهانها - مطلوب استخدامها.
الفصل الرابع فصل هام
أسئلة الامتحان ستكون على الشكل التالي:
مبرهنة 15 mark ⟵ 10
تمارين عملية 90 mark ⟵ 85

الساعات المكتبية:
الثلاثاء 2 ⟵ 10
الخميس 2 ⟵ 10

انتهى المقرر بتوفيق الله
بالتوفيق للجميع ^_^
أختكم في الله دانية البريشة
لاتنسونا من دعوة في ظهر الغيب