كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق | السنة : الثانية

المقرر : تحليل (3) | الفصل :الأول

المحاضرة : (19) | التاريخ :2013/12/9

ليكن $f(x)$ تابع معرف على المجال $I = [-\pi, +\pi]$

عندما نكتب :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

فإن هذه الكتابة تعبر عن أن المتسلسلة المثلثية المذكورة هي متسلسلة فوريية المقابلة للتابع $f(x)$ على I .

ـ لنفرض أن : $S(x)$ هو مجموع هذه المتسلسلة فيمكننا أن نكتب :

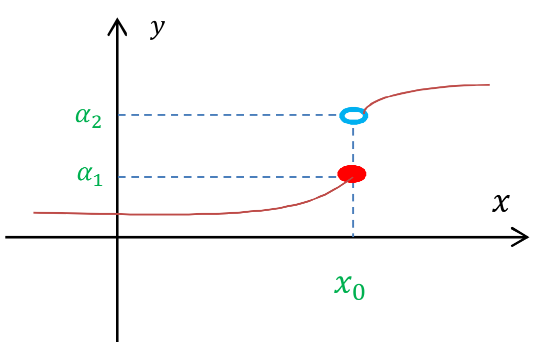
$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \longrightarrow \quad \text{على المجال } I$$

تعريف :

يقال عن نقطة مثل x_0 أنها نقطة انقطاع من النوع الأول للتابع $f(x)$ ..

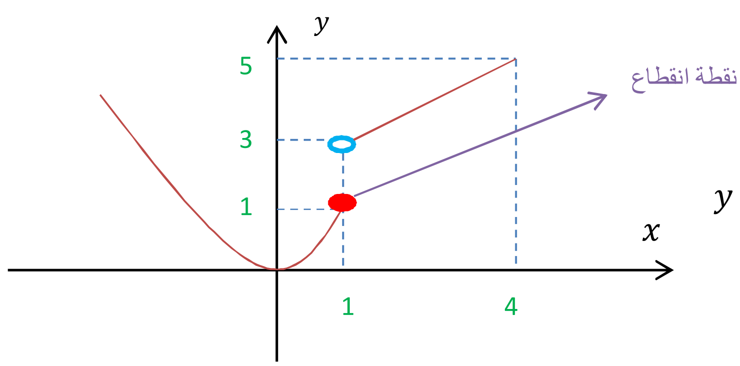
إذا كانت النهايتان : $f(x_0 + 0)$ وَ $f(x_0 - 0)$ موجودتين ومحدودتين
ولكنهما (مختلفتان) أو (متساويتان ولكنهما لا تساويان $f(x_0)$) .

الحالة الأولى : $\left(f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)\right)$

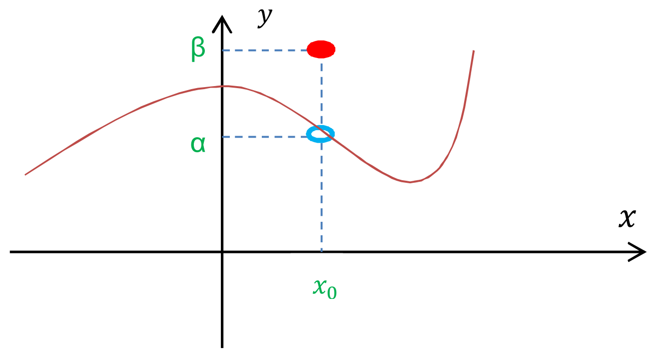


مثال :

$$y = \begin{cases} x^2 & : \ (x \leq 1) \\ 2x + 1 & : \ (x > 1) \end{cases}$$



الحالة الثانية : $\left(f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0)\right)$



شرط النشر في متسلسلة فورييه :

أن يكون عدد نقاط الانقطاع من النوع الأول (إن وجدت) تشكل مجموعة منتهية .

تعريف :

التابع المطَّرِد : هو تابع إمّا متزايد أو متناقص .

التابع المطَّرِد قطعياً : هو تابع مستمر على بعض نقاط المستوي وغير مستمر عند أخرى .

ملاحظة :

- يشترط على التابع $f(x)$ أن يكون مستمراً أو له عدد منته من نقاط الانقطاع من النوع الأول أو أن يكون مُطَّرِد قطعياً على المجال المدروس .
- إن نشر التابع $f(x)$ في متسلسلة فورييه على المجال I .. هو كتابة هذا التابع على شكل مجموع لمتسلسلة فورييه المقابلة له على المجال المفتوح .

~ إن قيمة المجموع $S(x)$ لمتسلسلة فورييه المقابلة للتابع $f(x)$ على المجال $I=[-\pi,+\pi]$ تكتب كما يلي :

1- $x_0\in\,]-\pi,+\pi[$ $\quad\Leftarrow\quad$ $S(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$

2- $x_0=\pm\,\pi$ $\quad\Leftarrow\quad$ $S(\pm\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$

3- إذا كان $f(x)$ مستمراً على I .. فإن $f(x)$ يكون مستمراً عند كل نقطة مثل : $x_0\in\,]-\pi,+\pi[$

وبالتالي : $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$

$$\Rightarrow\ S(x)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}=\frac{2\,.f(x_0)}{2}=\ f(x_0)$$

وبالتالي يكون :

$$f(x) = S(x) \quad , \quad \forall\, x \in I =]-\pi, +\pi[$$

4- إذا كان $S(\pi) = f(\pi)$ .. وكان $S(-\pi) = f(-\pi)$ .. فإن النشر يكون صحيحاً على المجال المغلق $[-\pi, +\pi]$ ..
أما إذا كان غير ذلك فيبقى النشر على المجال المفتوح ..

طريقة النشر في متسلسلة فورييه لتابع $f(x)$ على المجال $I = [-\pi, +\pi]$

1- نحسب الأمثال : (a_0, a_n, b_n) - من دساتير فورييه -
2- نستفيد من كون $f(x)$ مستمراً فنكتب :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n . \cos nx + b_n . \sin nx) \quad : \forall x \in]-\pi, +\pi[$$

3- لدراسة النشر من أجل الطرفيين نستخدم الدستور التالي:

$$S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}$$

ونقارن : $S(\pi) = f(\pi)$ وَ $S(-\pi) = f(-\pi)$

فإذا كان $S(\pi) = f(\pi)$ .. وكان $S(-\pi) = f(-\pi)$ .. فإن النشر يكون صحيح من أجل جميع قيم x على المجال المغلق $[-\pi, +\pi]$ ..
أما إذا كانت العلاقات غير متساوية .. فإن النشر يكون صحيحاً على المجال المفتوح ..

أمثلة :

انشر في متسلسلة فورييه التابع $f(x) = x$ وذلك على المجال $I = [-\pi, +\pi]$

الحل :

1- نحسب الأمثال :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-\pi}^{+\pi} = 0$$

$$(x \geq 1)\,;\;\; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \overbrace{x.\cos nx}^{\text{فردي}}\,.dx = 0$$

$$(x \geq 1)\,;\;\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \overbrace{x.\sin nx}^{\text{زوجي}}\,.dx = 2.\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x.\sin nx\,.dx \xRightarrow{\text{تكامل بالتجزئة}}$$

$$\begin{cases} u = x \;\Rightarrow du = dx \\ dv = \sin nx.dx \;\Rightarrow v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{cases} \Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\left\{-\left[\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right\}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\left\{-\left[\frac{\pi}{n}.\cos n\pi - 0\right] + \frac{1}{n}.\;\frac{1}{n}[\sin nx]_0^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{n}.\cos n\pi + \frac{1}{n^2}(\sin n\pi - 0)\right\} = -\frac{2}{n}\cos n\pi + \frac{2}{\pi.n^2}\sin n\pi$$

$$= -\frac{2}{n}.(-1)^n + \frac{2}{\pi.n^2}.0$$

$$\Rightarrow b_n = +\frac{2}{n}\,(-1)^{n+1}$$

2- وبما ان $f(x) = x$ مستمر على المجال I فيمكننا أن نكتب :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.\sin nx \quad , \;\; \forall x \in]-\pi, +\pi[$$

3- وأيضاً : $f(x)$ مستمر عند كل نقطة من I لأن:

$$S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2} = \frac{(-\pi)+(\pi)}{2} = 0$$

ولكن : $f(\pi) = \pi$ كذلك : $f(-\pi) = -\pi$

وبالتالي : $f(\pi) = \pi \neq 0 = S(\pi)$

وَ $f(-\pi) = -\pi \neq 0 = S(-\pi)$

إذن فالنشر المطلوب هو:

$$\boxed{x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.\sin nx \quad , \forall x \in]-\pi, +\pi[}$$

ملاحظة :

$$\begin{cases} \sin\pi & ,\sin 2\pi & ,\sin 3\pi & ,\sin 4\pi & ,\sin 5\pi & ,\sin 6\pi \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\pi & ,\cos 2\pi & ,\cos 3\pi & ,\cos 4\pi & ,\cos 5\pi & ,\cos 6\pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{cases}$$

إذن :

(قوانين للحفظ)

$$\boxed{\begin{array}{c} (n \geq 1) \;\; ; \;\; \cos n\pi = (-1)^n \\ \\ (n \geq 1) \;\; ; \;\; \sin n\pi = 0 \end{array}}$$

حالات خاصة :

دساتير فورييه لأجل التابع الفردي $f(x)$ على $I = [-\pi, +\pi]$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \;:\; (n \geq 1) \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x).\sin nx\,.dx \;:\; (n \geq 1) \end{cases}$$

دساتير فورييه لأجل التابع الزوجي $f(x)$ على $I = [-\pi, +\pi]$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x).dx \\ a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x).\cos nx\,.dx \;\; ; (n \geq 1) \\ b_n = 0 \;:\; (n \geq 1) \end{cases}$$

ملاحظة :

((إذا لم يكن $f(x)$ لا فردياً ولا زوجياً فيجب استعمال دساتير فورييه الأصلية))

وظيفة :

انشر في (متسلسلة فورييه) التابع $f(x) = x^2$ على المجال $I = [-\pi, +\pi]$

.... " انتهت المحاضرة "