5 التوابع العقدية المثلثية :

بفرض $z = x+iy$ متحول عقدي عندئذٍ نعرّف توابع الـ sin والـ cos العقديان كمايلي :

$$\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

منشور ماك لوران

$$z \longmapsto \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} z^{2n} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

صيغة أولر

$$\sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

كذلك نعرّف توابع الـ tg والـ ctg العقديان كمايلي :

$$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

$$ctg\, z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

نلاحظ أنّ توابع الـ cos والـ sin دوريان ودور كل منهما 2π لأنّ :

$$\cos(z+2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

بنفس الطريقة نجد أنّ : $\sin(z+2\pi) = \sin(z)$

أمّا توابع الـ tg والـ ctg دوريان ودورهما π لأنّ :

$$tg(z+\pi) = \frac{1}{i} \frac{e^{i(z+\pi)} - e^{-i(z+\pi)}}{e^{i(z+\pi)} + e^{-i(z+\pi)}} = \frac{1}{i} \frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{-e^{iz} - e^{-iz}}$$

$$= tg\, z$$

بنفس الطريقة:

$$ctg(z+\pi) = ctg$$

نلاحظ أن توابع الـ cos والـ sin ممثّلان بمتسلسلات قوى وبالتالي هما قابلان للاشتقاق على $\mathbb{C}$ حيث:

$$(\cos z)' = -\sin z \,,\ (\sin z)' = \cos z$$

كذلك توابع الـ tg والـ ctg قابلة للاشتقاق حيث يكون:

$$(tg\, z)' = \frac{1}{\cos^2 z} = (1 + tg^2 z)$$

طبعاً لا ننسى أن نبعد عن النقاط التي تعدم الـ $\cos z$

$$(ctg\, z)' = \frac{-1}{\sin^2 z} = (1 + ctg^2 z)$$

ومنه توابع الـ sin والـ cos تحليلية على $\mathbb{C}$.

أمّا توابع الـ tg والـ ctg فهي تحليلية على مجموعة تعريفها (لأنها توابع كسرية)

في الامتحان أكيد عدد كتب كرده أيضاً الشكل الجبري (قسم حقيقي + تخيلي)

اكتب الأعداد العقدية التالية بالشكل الجبري:

$\boxed{2}$ $$\cos(2i) = \frac{e^{i(2i)} + e^{-i(2i)}}{2} = \frac{e^{-2} + e^{2}}{2}$$

$$= \frac{e^{2} + \frac{1}{e^{2}}}{2}$$

في العقدي ممكن أن يكون $\cos z > 1$

$e^{2} = 7....$

$\boxed{2}$ $$\sin\left(\frac{\pi}{4} + i\right) = \frac{e^{i(\frac{\pi}{4}+i)} - e^{-i(\frac{\pi}{4}+i)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{(\frac{\pi}{4}i - 1)} - e^{(-\frac{\pi}{4}i + 1)}}{2i}$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-1}\right] - \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)e\right]}{2i}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}ie^{-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}e + \frac{1}{\sqrt{2}}ie}{2i}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}e}{2i} + i\,\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}e}{2i}$$

$$= \left[\frac{1}{2\sqrt{2}e} + \frac{1}{2\sqrt{2}}e\right] + i\left[\frac{e}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}e}\right]$$

$\boxed{3}$ $$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) + \left(\cos -\frac{\pi}{4} + i\sin -\frac{\pi}{4}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

تمرين: أثبت أنه أياً كان $z \in \mathbb{C}$ فإن:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

الحل:

$$l_1 = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{2iz} + e^{-2iz} + 2 + e^{2iz} - e^{-2iz} + 2\right] = 1 = l_2$$

تمرين: حل المعادلات التالية في $\mathbb{C}$:

$\boxed{1}$ $\sin z = 0$

الحل: نفرض أنّ $z = x + iy$ عندئذٍ:

ضربنا الطرفين بـ e^{iz}

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=0 \Rightarrow e^{iz}=e^{-iz} \rightarrow e^{2iz}=1$$

$$\rightarrow e^{2i(x+iy)}=1 \rightarrow e^{-2y+2ix}=1.e^{0i}$$

$$\rightarrow \begin{cases} e^{-2y}=1=e^{0} \Rightarrow y=0 \\ 2x=0+2\pi k \rightarrow x=\pi k \;;\; k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{z=\pi k \;;\; k\in\mathbb{Z}}$$

$\boxed{2}$ $\cos z=\frac{1}{2}$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow e^{iz}+e^{-iz}=1 \rightarrow e^{2iz}-e^{iz}+1=0$$

نفرض أن : $\Leftarrow w=e^{iz}$

$$w^2-w+1=0$$

$$\Delta=1-4(1)(1)=-3 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\mp\sqrt{3}\,i$$

$$\rightarrow w_1=\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2} \Rightarrow e^{iz}=\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$$

$$\rightarrow iz=\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)=$$

$$=\ln\left|\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right|+\left(\operatorname{Arg}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\right)+2\pi k\right)i \quad ;k\in Z$$

$$=0+i\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right) \quad ;k\in\mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \boxed{z=\frac{\pi}{3}+2\pi k} \;;\; k\in\mathbb{Z}$$

وبحساب ω_2 نجد أنّ :

$$\boxed{z = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad ; k \in \mathbb{Z}}$$

وظيفة

① حل المعادلة التالية في $\mathbb{C}$:

$tg\ z = 1$

② اكتب العدد العقدي التالي بالشكل الجبري :

$\cos(\pi - i)$