٢٠١٢ /١٢ /٢٤

تحليل عملي (1):

المحاضرة السادسة:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - 2\cos x + \cos^2 x}{x^4}$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نطبق أوبيتال:

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{2\sin x - 2\cos x \cdot \sin x}{4x^3} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{2\sin x - \sin 2x}{4x^3} \right]$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نطبق أوبيتال:

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{2\cos x - 2\cos 2x}{12x^2} \right]$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نطبق أوبيتال:

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{-2\sin x + 4\sin 2x}{24x} \right]$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نطبق أوبيتال:

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{-2\cos x + 8\cos 2x}{24} \right]$$

$$= \frac{-2+8}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg\, x^2}{5x^2 + 4x^3}$$

$$f(x) = \frac{tg\, x^2}{x^2(5+4x)} = \frac{tg\, x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{5+4x}$$

وبما أن $\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln tg(ax)}{\ln tg(bx)}$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ نطبق أوبيتال

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\frac{a}{\cos^2 ax}}{tg\, ax}}{\frac{\frac{b}{\cos^2 bx}}{tg\, bx}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{a}{\cos^2 ax} \cdot \frac{\cos ax}{\sin ax}}{\frac{b}{\cos^2 bx} \cdot \frac{\cos bx}{\sin bx}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{ax}{\cos ax \cdot \sin ax}}{\frac{bx}{\cos bx \cdot \sin bx}} = 1$$

علماً أن

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\sin \theta} = 1$$

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{1}{\underset{(1+x)}{1-x}} - \frac{2}{\underset{(1)}{1-x^2}}$$

$$= \frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{x-1}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \frac{-1}{1+x}$$

$3) \; y = x^{x^2}$

مأخذ لغاريتم الطرفين

$\ln y = \ln x^{x^2}$

$\ln y = x^2 \ln x$

نشتق بالنسبة إلى x

$\frac{y'}{y} = 2x \cdot \ln x + x^2 \frac{1}{x}$

$\frac{y'}{y} = 2x \cdot \ln x + x$

$\frac{y'}{y} = x(2\ln x + 1) \Rightarrow$

$y' = y\left[x(2\ln x + 1)\right]$

$y' = x^{x^2}\left[x(2\ln x + 1)\right]$

$y' = x^{x^2}\left[x(2\ln x + 1)\right]$

احسب كلاً من النهايات الآتية:

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x}$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ نطبق أوبيتال n مرة

$\lim_{x \to \infty} \frac{n!}{e^x} = 0$

نكرر الإشتقاق:

$x^n \xrightarrow{1} n x^{n-1}$

$\xrightarrow{2} n(n-1) x^{n-2}$

$\xrightarrow{n} n(n-1)(n-2) \cdots n(n-(n-1)) x^{n-n}$

$\lim_{x \to 1} f(x) = -\frac{1}{2}$

$5) \; \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \cot x\right)$

$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نطبق أوبيتال.

$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$

$6) \; \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}$

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نطبق أوبيتال.

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{ch} x}{1} = 1$ $\quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

أوجد مشتق الدوال الآتية

$1) \; y = x^x$

مأخذ لغاريتم الطرفين

$\ln y = \ln x^x$

$\ln y = x \ln x$

نشتق بالنسبة إلى x

$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$

$\frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y(\ln x + 1)$

$y' = x^x(\ln x + 1)$