كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة دمشق

السنة : الثانية

المقرر : تحليل (3)

الفصل : الأول

المحاضرة : (21)

التاريخ : 2013/12/16

كنا قد توقفنا في المحاضرة السابقة عند (متطابقة بارسيفال) والتي تنص على ما يلي :

ليكن التابع $f(x)$ الذي تم نشره على المجال $I = [-\pi, +\pi]$ .. عندئذٍ :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x)]^2.dx$$

حيث (a_0, a_n, b_n) هي ثوابت فورييه ..

ـ إن تعميم هذه المتطابقة هو :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}[f(x)]^2.dx$$

حيث هذه المتطابقة للتابع $f(x)$ الذي تم نشره على المجال $I = [-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$ وَ (a_0, a_n, b_n) ثوابت فورييه

تمرين .. (وظيفة)

باستخدام قيم الثوابت (a_0, a_n, b_n) عند نشر التابع $f(x) = x^2$ في متسلسلة فورييه على المجال $I = [-\pi, +\pi]$ .. وباستخدام متطابقة بارسيفال ,, أوجد مجموع المتسلسلة المتقاربة التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$ ثم أوجد أيضاً مجموع المتسلسلة المتقاربة $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

... التكاملات المعتلة ... (النوع الأول)

النمط الأول ..

$$\int_a^{+\infty} f(x).dx = \lim_{A \to +\infty}\int_a^A f(x).dx \quad : A \geq a$$

ـ يكون هذا التكامل المعتل متقارب إذا وفقط إذا كانت النهاية موجودة ومحدودة .. وتكون قيمته في حال تقاربه مساوية لقيمة هذه النهاية الموجودة والمحدودة ..

ـ ويكون هذا التكامل المعتل متباعد إذا وفقط إذا لم يكن متقارباً .. أي أنه تكون النهاية إما غير موجودة أو موجودة ولكنها ليست محدودة ..

النمط الثاني ..

$$\int_{-\infty}^{b} f(x).dx = \lim_{A' \to -\infty} \int_{A'}^{b} f(x).dx \quad : \ A' \leq b$$

- يكون هذا التكامل المعتل متقارب إذا وفقط إذا كانت النهاية موجودة ومحدودة .. وتكون قيمته في حال تقاربه مساوية لقيمة هذه النهاية الموجودة والمحدودة ..

- ويكون هذا التكامل المعتل متباعد إذا وفقط إذا لم يكن متقارباً .. أي أنه تكون النهاية إما غير موجودة أو موجودة ولكنها ليست محدودة ..

النمط الثالث ..

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = \lim_{\begin{cases} A \to +\infty \\ A' \to -\infty \end{cases}} \int_{A'}^{A} f(x).dx$$

وكل من A وَ A' تسعى لنهايتها بشكل مستقل عن الأخرى .. عندئذٍ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = \int_{-\infty}^{0} f(x).dx + \int_{0}^{\infty} f(x).dx \quad : \text{(الصفر قيمة حقيقية كيفية)}$$

- يكون التكامل المعتل الأساسي متقارب إذا وفقط إذا كان التكاملان $\int_{0}^{\infty} f(x).dx$ وَ $\int_{-\infty}^{0} f(x).dx$ متقاربان وقيمة هذا التكامل مساوية لمجموع قيمتي التكاملين المذكورين ..

- ويكون التكامل المعتل الأساسي متباعد إذا كان على الأقل أحد التكاملين $\int_{0}^{\infty} f(x).dx$ وَ $\int_{-\infty}^{0} f(x).dx$ متباعداً .. وفي هذه الحالة ليس للتكامل قيمة ..

... القيمة الرئيسة للتكامل المعتل $V.P \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx$ ...

- تعرف القيمة الرئيسة كما يلي :

$$V.P \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{+A} f(x).dx$$

في القيمة الرئيسة يجب أخذ متغير حدي التكامل ذاته

وتكون هذه القيمة موجودة إذا وفقط إذا كانت النهاية في الطرف الأيمن موجودة ومحدودة وقيمة هذه النهاية هي القيمة الرئيسة للتكامل المدروس .. وفيما خلا عن ذلك تكون القيمة الرئيسة غير موجودة ..

ملاحظة :

من الممكن أن تكون القيمة الرئيسة للتكامل المعتل موجودة في حين كَون التكامل المعتل متباعد .. إلا أنه إذا كان التكامل المعتل موجوداً فإن القيمة الرئيسة له تكون موجودة .. وسنضرب مثالاً على ذلك ..

مثال :

ادرس التكامل المعتل التالي : $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x}$ وادرس القيمة الرئيسة له ..

الحل :

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{\substack{A\longrightarrow+\infty\\A'\longrightarrow-\infty}}\int_{A'}^{A}\frac{dx}{x}=\lim_{\substack{A\longrightarrow+\infty\\A'\longrightarrow-\infty}}[\ln x]_{A'}^{A}=\lim_{\substack{A\longrightarrow+\infty\\A'\longrightarrow-\infty}}[\ln|A|-\ln|A'|]$$

$$=\lim_{\substack{A\longrightarrow+\infty\\A'\longrightarrow-\infty}}\ln\frac{A}{|A'|}\Longrightarrow\left(\text{النهاية غير موجودة لأن } A\neq A'\right)$$

وبالتالي التكامل المدروس متباعد ..

دراسة القيمة الرئيسة :

$$V.P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{A\longrightarrow+\infty}\int_{-A}^{+A}\frac{dx}{x}=\lim_{A\longrightarrow+\infty}[\ln|x|]_{-A}^{+A}=\lim_{A\longrightarrow+\infty}[\ln|A|-\ln|-A|]$$

$$=\lim_{A\longrightarrow+\infty}\ln\frac{A}{|-A|}=\ln 1=0$$

... الـتـكـامـلات الـمـعـتـلـة ... (النوع الثاني)

ليكن لدينا التابع $f(x)$ المعرف على المجال $I=[a,b]$ باستثناء نقطة مثل $c\in I$ ..
نقول عن c أنها نقطة شاذة للتابع $f(x)$ على المجال I إذا كان :

$$\left(\lim_{x\longrightarrow c}f(x)=\pm\infty\right)$$

ليكن لدينا التكامل التالي :

$$I=\int_a^b f(x).dx$$

أولاً .. الشذوذ عند $\langle b\rangle$:

إذا كانت b نقطة شاذة للتابع $f(x)$ فإن : $\lim_{x\longrightarrow b}f(x)=\pm\infty$ .. وبالتالي يعرَّف التكامل المعتل من النوع الثاني كما يلي :

$$\int_a^b f(x).dx=\lim_{\zeta\longrightarrow0}\int_a^{b-\zeta}f(x).dx$$

$\boxed{\text{إيتّا} \rightarrow \zeta}$

- يقال عن هذا التكامل المعتل أنه متقارب إذا وفقط إذا كانت النهاية في الطرف الأيمن موجودة ومحدودة ..
- ويكون هذا التكامل المعتل متباعد إذا كانت النهاية المذكورة غير موجودة أو موجودة ولكنها غير محدودة ..

وفي حالة التقارب تكون قيمة التكامل المعتل السابق هي قيمة النهاية الموجودة والمحدودة المذكورة ..

ثانياً .. الشذوذ عند $\langle a \rangle$:

إذا كانت b نقطة شاذة للتابع $f(x)$ فإن : $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ .. وبالتالي يعرَّف التكامل المعتل من النوع الثاني كما يلي :

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x).dx$$

- يقال عن هذا التكامل المعتل أنه متقارب إذا وفقط إذا كانت النهاية في الطرف الأيمن موجودة ومحدودة ..
- ويكون هذا التكامل المعتل متباعد إذا كانت النهاية المذكورة غير موجودة أو موجودة ولكنها غير محدودة ..

وفي حالة التقارب تكون قيمة التكامل المعتل السابق هي قيمة النهاية الموجودة والمحدودة المذكورة ..

ثالثاً .. الشذوذ عند $\langle a$ وَ $b \rangle$:

وهنا يكون الشذوذ عند النقطة c حيث : $a < c < b$ ..

وبالتالي يعرَّف التكامل المعتل من النوع الثاني كما يلي :

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{\zeta \to 0} \int_a^{c-\zeta} f(x).dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x).dx$$

ويكون التكامل المعتل في الطرف الأيسر متقارب إذا كان كل من التكاملان في الطرف الأيمن متقاربان .. وتكون قيمة هذا التكامل مساوية لمجموع قيمتي هذين التكاملين ..

ويكون التكامل المعتل في الطرف الأيسر متباعد عندما يكون أحد التكاملين في الطرف الأيمن على الأقل متباعد .. وفي هذه الحالة ليس للتكامل المعتل قيمة ..

.. القيمة الرئيسة للتكامل المعتل في هذه الحالة :

$$V.P \int_a^b f(x).dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x).dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x).dx \right] \quad : a < \underbrace{c}_{\text{نقطة شاذذة}} < b$$

... التكامل التابع لوسيط ...

$$I = \int_a^b f(x,t)\,.\,dx$$

حيث : b وَ a تابعان للوسيط t في الحالة العامة .. ويدعى هذا التكامل بـ : (التكامل التابع لوسيط t) .

ـ دستور المشتق الأول للتكامل السابق بالنسبة للوسيط (t) :

$$I = \int_a^b f(x,t)\,.\,dx \implies$$

$$\boxed{\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\int_a^b f(x,t).\,dx\right] = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,.\,dx + f(b(t),t).\frac{db}{dt} - f(a(t),t).\frac{da}{dt}}$$

... تمارين ...

1) ادرس التكامل المعتل التالي :

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{2+\sin x}{x^2}\,.\,dx$$

2) ادرس التكامل المعتل التالي :

$$I_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) احسب التكامل التالي :

$$I(t) = \int_0^t \frac{\ln(1+tx)}{1+x^2}\,.\,dx$$

" انتهت المحاضرة " ....