١٨/ ١٢/ ٢٠١٣ المحاضرة الثالثة عشرة.

إذا كان المستقيم معطى وسيطيا نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة الكرة نحصل على معادلة من الدرجة الثانية بالوسيط λ وهنا نميز ثلاث حالات

①: أن يكون Δ في هذه الحالة $\Delta>0$ أي يوجد وسيطان ⇐ المستقيم قاطع للكرة ومن أجل تعيين احداثيات نقطتي التقاطع نحسب λ ثم نعوضها بالمعادلات الوسيطية

②: إذا كان $\Delta=0$ ⇐ أن المعادلة لها جذر مضاعف أي يوجد قيمة وحيدة لـ λ وعليه فالمستقيم مماس للكرة من أجل إيجاد احداثيات نقطة التماس نحسب λ ثم نعوضها بالمعادلات الوسيطية.

③: إذا كان $\Delta<0$ ⇐ أن المعادلة مستحيلة الحل أي لا يوجد قيمة حقيقية لـ λ وبالتالي فالمستقيم خارج الكرة.

مثال. ما هو وضع المستقيم المعطى وسيطيا بالمعادلات التالية $x=1+2t$ ، $y=t$ ، $z=1+t$ والكرة $x^2+y^2+z^2+2x-4y+2z-1=0$

نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة الكرة

$$(1+2t)^2+t^2+(1+t)^2+2(1+2t)-4t+2(1+t)-1=0$$

$$1+4t+4t^2+t^2+1+2t+t^2+2+4t-4t+2+2t-1=0$$

$$6t^2+8t+5=0 \quad \Delta=64-4.5.6=64-120<0$$

فالمستقيم خارج الكرة.

مثال. أثبت أن المستقيم المعطى وسيطيا بالمعادلات التالية [illegible] يمس الكرة [illegible] وأوجد نقطة التماس؟

المستوي الأساسي لكرتين: لتكن لدينا الكرتين

$$S_1 \equiv x^2+y^2+z^2-2a_1x-2b_1y-2c_1z+d_1=0$$

$$S_2 \equiv x^2+y^2+z^2-2a_2x-2b_2y-2c_2z+d_2=0$$

المستوي الأساسي لكرتين هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ المتساوية القوى بالنسبة للكرتين. فما المقصود بقوة نقطة بالنسبة لكرة؟

قوة نقطة بالنسبة لكرة.

لتكن لدينا الكرة $S^* \equiv x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ ولنفرض (α,β,γ) جيوب تمام التوجيه للمستقيم D ونفرض $M(x,y,z)$ نقطة دائمة على هذا المستقيم عندئذ تعطى بالمعادلات الوسيطية له بالشكل $x=x_0+\alpha\lambda$, $y=y_0+\beta\lambda$, $z=z_0+\gamma\lambda$ أن الوسيط λ هو الطول الجبري للقطعة M_0M باعتبارها محمولة على المحور M_0d الموجه بجهة $\vec{u}=(\alpha,\beta,\gamma)$ من أجل إيجاد قيمتين للوسيط λ الموافقين لنقطتي التقاطع ندرس التقاطع للمستقيم D مع الكرة ثم نعوض معادلات المستقيم D في معادلة الكرة نحصل على المعادلة التالية

$$\lambda^2+2\lambda(\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0+\alpha a+\beta b+\gamma c)+x_0^2+y_0^2+z_0^2+2ax_0+2by_0+2cz_0+d_0=0$$

هذه المعادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ λ والحدود السبعة الأخيرة ما هي إلا الطرف الأيسر من معادلة الكرة بعد تعويضها M_0 بالكرة. من هذه المعادلة نجد أن جداء الجذرين

$$\lambda_1\lambda_2=\overline{M_0M_1}\cdot\overline{M_0M_2}=S^*(x_0,y_0,z_0)$$

وهذا الجداء لا يتعلق بـ (α,β,γ) أي لا يتعلق بوضع المستقيم D المنشأ من M_0 هذا الجداء الثابت يسمى بالتعريف قوة النقطة M_0.

ملاحظة: إذا كانت معادلة الكرة معطاة بالشكل التالي

$$S(x,y,z)=Ax^2+Ay^2+Az^2-2ax-2by-2cz+d=0$$

عندئذ تعطى قوة النقطة بالعلاقة

$$S^*(x,y,z)=\frac{S(x_0,y_0,z_0)}{A}$$

بالعودة إلى المستوي الأساسي لكرتين نحصل على معادلة المستوي الأساسي وهو عبارة عن الفرق بين الكرتين

$$S^*(x,y,z)-S^{*1}(x,y,z)=0$$

ملاحظة: إذا كانت قوة النقطة أكبر من الصفر عندئذ تكون النقطة خارج الكرة وإذا كانت تساوي الصفر فإن النقطة تقع على الكرة وإذا كانت أصغر من الصفر فإن النقطة داخل الكرة.

مثال: احسب قوة النقطة $M_0(1,2,3)$ بالنسبة للكرة المعطاة بالمعادلة التالية:

$S(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-6x-3y+5z-1=0$

$S^*(x,y,z) = (1)^2+(2)^2+(3)^2-6(1)-3(2)+5(3)-1=16$

أين وضع النقطة بالنسبة للكرة؟ النقطة خارج الكرة.

مثال: أوجد معادلة المستوي الأساسي للكرتين $S^* = 3x^2+3y^2+3z^2-x+y+4z+1=0$

$S'^* = x^2+y^2+z^2+x+2y+2z-1=0$

(1) نأخذ: $S^* = x^2+y^2+z^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{4}{3}z+\frac{1}{3}=0$

$S^*-S'^* = 4x+5y+2z-4=0$

تقاطع كرتين: اذا تقاطعت كرتان كان مستويهما الأساسي هو مستوي نقاط التقاطع لأن هذه النقاط متساوية القوة ((القوة معدومة)) بالنسبة لهاتين الكرتين. إذا تتقاطع الكرتين بدائرة هي دائرة تقاطع احداهما بالمستوي الأساسي. أما المستوي الأساسي لكرتين متماستين فهو مستوي المماس المشترك لهاتين الكرتين في نقطة التماس. واذا لم تشترك الكرتان بأية نقطة فمستويهما الأساسي لا يقطع أي كرة منهما وعليه لتعيين وضع كرتين بالنسبة لبعضهما يكفي تعيين وضع احداهما بالنسبة للمستوي الأساسي.

مثال: عين وضع الكرتين: $S_1 = x^2+y^2+z^2-2=0$ ، $S_2^* = 2x^2+2y^2+2z^2-8y+5=0$

$S_2^* = x^2+y^2+z^2-4y+\frac{5}{2}=0$

معادلة المستوي الأساسي للكرتين: $S_1^*-S_2^* = 4y-\frac{9}{2}=0 \Rightarrow 8y-9=0$

ندرس وضع المستوي الأساسي مع الكرة الأولى ← مركز الكرة الأولى $(0,0,0)$

$\delta_1 = \frac{|-9|}{\sqrt{64}} = \frac{9}{8}$ ، $R_1 = \sqrt{2}$

نلاحظ $R_1 > \delta_1$ وبالتالي المستوي الأساسي يقطع الكرة بدائرة مركزها $(0,\frac{9}{8},0)$ ونصف قطرها

$r^2 = R^2 - \delta_1^2 = \frac{\sqrt{47}}{8}$

تعامد كرتين: نقول عن كرتين أنهما متعامدان في احدى نقاط تقاطعهما اذا تعامد مستويا التماس لهما في هذه النقطة وتتعامد الكرتان S_1 و S_2 اذا تعامدت أقطارها المارة في نقاط التقاطع ويكون أحد أقطار الكرتين مماساً للكرة الأخرى في نقاط التقاطع أي أن قوة مركز الكرة S_1 بالنسبة الى الكرة S_2 تكون مساوية

لكي نعرف قطر الكرة S.

اذا كانت الكرتين $S_1^* = x^2+y^2+z^2-2a_1x-2b_1y-2c_1z+d_1=0$

$S_2^* = x^2+y^2+z^2-2a_2x-2b_2y-2c_2z+d_2=0$

مركز الكرة الأولى (a_1,b_1,c_1) ومركز الكرة الثانية (a_2,b_2,c_2) فحتى تكون قوة S بالنسبة للكرة الثانية تساوي قطر الكرة الأولى وعليه لتتعامد كرتان يجب أن يتحقق الشرط التالي

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=\frac{d_1d_2}{2}$$

مثال: أثبت أن الكرتين: $S_1^* = x^2+y^2+z^2+4x-6y-2z-27=0$

$S_2^* = x^2+y^2+z^2-6x+4y-6z+9=0$

$C_1(-2,3,1) \quad d_1=-27 \quad C_2(3,-2,3) \quad d_2=9$

$a_1a_2=-6 \quad , b_1b_2=-6 \quad , c_1c_2=3 \Rightarrow -6-6+3=-9$

$\frac{d_1d_2}{2}=\frac{-27+9}{-2}=-9$

نلاحظ أن الشرط محقق وبالتالي الكرتين متعامدتين.

حزمة الكرات: نفرض S_1, S_2 كرتين مستويهما الأساسي هو المستوي Q نسمي بالتعريف حزمة الكرات المعينة بالكرتين S_1 و S_2 مجموعة الكرات التي لها مع إحدى الكرتين المستوي الأساسي Q ومن التعريف ينتج أن المستوي الأساسي لأية كرتين هو المستوي Q وأن جميع مراكز الحزمة تقع على المستقيم المار بمركزي الكرتين S_1 و S_2 فإذا كانتا متقاطعتين بدائرة C فإن جميع كرات الحزمة تتقاطع بنفس الدائرة وبسهولة يمكن كتابة معادلة الحزمة بالشكل التالي $S_\lambda = S_1 + \lambda S_2 = 0$ حيث λ وسيط حقيقي ويمكن أيضاً كتابة معادلة الحزمة بالشكل $S_M = S_1 + QM = 0$ حيث Q هو الطرف الأيسر من معادلة المستوي الأساسي للكرتين S_1, S_2 أوجد معادلة الكرة التي تمر بالدائرة:

$$C\begin{cases} S = x^2+y^2+z^2-2x+3y-6z-5=0 \\ Q = 5x+2y-z-3=0 \end{cases}$$

بالنقطة $A(2,-1,1)$

نقوم بإيجاد حزمة الكرات المارة بالدائرة الموضوعة سابقاً من الحزمة الكرة التي تمر بالنقطة $A(2,-1,1)$.

$$x^2 + y^2 + z^2 + (-2+5\lambda)x + (3-2\lambda)y + (-1-\lambda)z + (5-3\lambda) = 0$$

نعوض احداثيات النقطة في معادلة الحزمة فنحصل على قيمة λ نعوضها في معادلة الحزمة ونحصل على الكرة المطلوبة.

انتهت المحاضرة

وانتهى المقرر   لاتنسونا من صالح دعائكم.

أسرة عمل سيرياماث : www.syriamath.net